ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

# ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XVII

1956

REDIGUNT:

L. KALMÁR, L. RÉDEI, B. SZ.-NAGY



SZEGED

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

# ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

17. KÖTET

1956

SZERKESZTIK:

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ, SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

FELELŐS SZERKESZTŐ:

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

SZEGED

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

# ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XVII

1956

REDIGUNT:

L. KALMÁR, L. RÉDEI, B. SZ.-NAGY

SZEGED

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

# ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

17. KÖTET

1956

SZERKESZTIK:

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ, SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

FELELŐS SZERKESZTŐ:

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

SZEGED

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

# INDEX — TARTALOM

## TOMUS XVII — 1956 — 17. KÖTET

## BIBLIOGRAPHIE



A kiadásért felelős: Szőkefalvi-Nagy Béla

Eredeti kiadásról készült változatlan utánnyomás

Külföldi terjesztés:
KULTURA KÖNYV- ÉS HÍRLAP
KÜLKERESKEDELMI VÁLLALAT
BUDAPEST 62,
P. O. B. 149

This book is a reproduction of the original, published
in Szeged, Hungary

General Distributors:
KULTURA Hungarian Trading Company
for Books and Newspapers
BUDAPEST 62, P. O. B. 149,
Hungary
Printed in Hungary, 1968

# FRÉDÉRIC RIESZ

**1880 — 1956**

La rédaction des *Acta Scientiarum Mathematicarum* a pour triste devoir de faire part du décès, survenu le 28 février 1956, à l'âge de 76 ans, de

FRÉDÉRIC RIESZ,

orgueil de la mathématique hongroise, fondateur de ces *Acta* et membre de leur rédaction jusqu'à sa mort.

Frédéric Riesz naquit le 22 janvier 1880 à Győr. Après avoir fait ses études supérieures à l'École Polytechnique de Zurich et aux Universités de Budapest et de Göttingen, il passa son doctorat à l'Université de Budapest. Après quelques années de travail en qualité de professeur de lycée, à Lőcse et à Budapest, il était nommé, en 1911, professeur à l'Université de Kolozsvár. A la fin de la première guerre mondiale, l'Université a dû quitter cette ville et, à partir de 1921, Riesz a poursuivi son travail comme professeur à l'Université, alors établie, de Szeged. Grâce à la grande autorité scientifique et à l'activité énergique de Riesz et de son collègue Alfred Haar, l'Institut de mathématiques de l'Université se renforçait très rapidement et devenait un véritable centre de recherches mathématiques. Les *Acta* de Szeged, fondés par Riesz et Haar en 1922, étaient en cette période le seul journal mathématique hongrois publié dans les langues des congrès internationaux. Ils ont beaucoup contribué, suivant l'intention de leurs fondateurs, à resserrer les relations internationales de la mathématique hongroise. F. Riesz a continué à prendre part à la rédaction même après son départ de Szeged en 1946, quand, à l'invitation de l'Université de Budapest, il quitta l'Université de Szeged. Il travailla en qualité de professeur de l'Université de Budapest, malgré sa maladie toujours aggravée, jusqu'aux derniers mois de sa vie.

Dès le début de sa carrière scientifique, Frédéric Riesz acquit une brillante renommée dans le monde des mathématiciens. Ses découvertes ont exercé une influence profonde sur le développement des mathématiques et même elles ont ouvert une nouvelle voie aux recherches en mainte direction; ainsi Frédéric Riesz est-il devenu une personnalité de premier ordre, reconnu par les mathématiciens du monde entier. L'étendue de son oeuvre scientifique ne nous permet pas d'en rendre compte ici en détail. Un des résultats les plus connus attachés à son nom est le théorème de Riesz—Fischer, de 1907, théorème d'importance capitale dans la théorie des séries orthogonales, des équations différentielles et intégrales, dans la théorie des fonctions à variable complexe et même dans la physique mathématique: en effet, c'est ce théorème qui fournit le fondement à la démonstration du fait que les théories dues à Heisenberg et à Schrödinger de la mécanique quantique sont équivalentes. Les notions d'espaces $L^p$ et $C$ de fonctions, créées par lui, et les propriétés fondamentales des fonctionnelles linéaires et des équations fonctionnelles linéaires de ces espaces qu'il a découvertes, ont fournit la matière qui a servi comme fondement à une série de notions (espace linéaire normé complet, fonctionnelle linéaire, transformation linéaire, etc.) et de résultats qui constituent la base de l'Analyse Fonctionnelle. Ses recherches sur les fonctions sous-harmoniques ont servi de point de départ à un développement imprévisible de la théorie du potentiel.

Frédéric Riesz a eu une admirable capacité pour saisir l'essentiel des différents problèmes: c'est pourquoi il a réussi d'une part à trouver des généralisations importantes de nombreux théorèmes connus, de l'autre à simplifier les démonstrations parfois très compliquées de bien des résultats fondamentaux. Il suffit de rappeler dans cet ordre d'idées la construction de la théorie de l'intégrale de Lebesgue sans s'appuyer sur la théorie de la mesure, sa démonstration, d'une simplicité insurpassable, de la dérivabilité presque partout des fonctions monotones, sa démonstration (trouvée en collaboration avec L. Fejér) du théorème fondamental de la représentation conforme, ses démonstrations des théorèmes spectraux et des théorèmes ergodiques.

Mais ce n'était pas seulement l'Analyse ou l'Analyse Fonctionnelle où Frédéric Riesz a obtenu des résultats fondamentaux. Rappelons en particulier son rôle de pionnier dans la théorie des espaces topologiques: au Congrès de Rome, en 1908, il a formulé un système d'axiomes de l'espace topologique, en prenant pour notion primitive celle de point limite; il arriva ainsi à la classe d'espaces topologiques qui, sous le nom d'espaces $T_1$, ont occupé une place définitive dans la topologie moderne.

Savant, professeur, membre de l'Académie hongroise et correspondant de diverses Académies étrangères, Docteur honoris causa des Universités de Szeged, de Budapest et de Paris, Frédéric Riesz a été le Maitre vénéré des mathématiciens hongrois. Ce sera un devoir d'honneur des *Acta Scientiarum Mathematicarum* de continuer leur activité toujours dans l'esprit de leur illustre fondateur.

**La rédaction.**

# On a type of universal forms in discretely valued fields.

By ŠTEFAN SCHWARZ in Bratislava (ČSR).

In the papers [9] and [10] I dealt with the representation of the elements of a finite field $GF(p^f)$ by the forms

$$a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \cdots + a_s x_s^k, \quad a_i \in GF(p^f).$$

I proved especially the following

Theorem 1. *Let $GF(p^f)$ be a finite field of characteristic $p$. Let be $\delta = (p^f - 1, k) \leqq p - 1$. Suppose that $a_1, a_2, \ldots, a_\delta$ are elements $\in GF(p^f)$ with $a_1 a_2 \ldots a_\delta \neq 0$. Then the equation*

$$a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \cdots + a_\delta x_\delta^k = b$$

*has a solution with $x_1, x_2, \ldots, x_\delta \in GF(p^f)$ for every $b \in GF(p^f)$.*

This theorem will be proved again as a special case of the more general Theorem 3 below.

CHEVALLEY [2] proved: If $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is any polynomial in $n$ variables with coefficients $\in GF(p^f)$ in which the constant term is zero and if the degree of $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is less than $n$ then

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

is soluble in $GF(p^f)$ with not all the unknowns equal to zero.

It follows from this theorem that

$$a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \cdots + a_k x_k^k - b x_{k+1}^k = 0, \quad a_i, b \in GF(p^f)$$

is always (i. e. for every $k \geqq 1$) soluble with not all $x_i$ equal to zero. But this fact does not imply that every $b \in GF(p^f)$ is representable in the form

$$b = a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \cdots + a_k x_k^k.$$

Let, for instance, $GF(7^2)$ be a field with 49 elements. We can represent all elements $\xi \in GF(7^2)$ in the form $\xi = a_0 + a_1 j$ $(a_0, a_1 = 0, 1, \ldots, 6)$, where $j$ satisfies the irreducible equation $j^2 + 1 = 0 \pmod 7$. Then the equation

$$x_1^8 + x_2^8 + \cdots + x_8^8 - j x_9^8 = 0$$

is soluble in $GF(7^2)$ (f. i. with $x_1 = \cdots = x_7 = 1$, $x_8 = x_9 = 0$). But it is easy to show (see [9], p. 124) that

$$x_1^8 + x_2^8 + \cdots + x_8^8 - j = 0$$

is not soluble with $x_1, x_2, \ldots, x_8 \in GF(7^2)$. Hence the theorem of CHEVALLEY is not sharp enough to prove theorems like Theorem 1.

An other direction in which investigations have been made is the following. Let $f(x_1, \ldots, x_n)$ be a homogeneous polynomial in $n$ variables of degree $r$ over a $\mathfrak{p}$-adic number field $K$ with integral coefficients. Then CHEVALLEY's theorem asserts that

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

has always a non-zero integral solution if $n > r$. But this does not imply that $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^i}$ is soluble for every $i \geqq 1$. $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ need not be soluble in $K$.

It is known (see [1]) that to every $r$ there exists a number $\Phi(r)$ such that if $n \geqq \Phi(r)$ $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ is soluble in $K$. HASSE [4] proved that for the quadratic case $n \geqq 5$ is sufficient. (See also JONES [5].) Recently DEMYANOV [3] and LEWIS [7] proved that, for every cubic homogeneous polynomial with $n \geqq 10$, $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ has in $K$ a non-trivial solution.

For the inhomogeneous case — as far as I know — complete results are known only for quadratic forms. It holds f. i. (see JONES [5], p. 46): Let $R_p$ be the rational $p$-adic field. If $f(x_1, \ldots, x_n)$ is an $n$-ary quadratic form with coefficients in $R_p$, with a non-zero determinant and $n \geqq 4$, then $f = b$ is solvable in $R_p$ for any number $b$ in $R_p$.

In this paper we shall study inhomogeneous polynomials of the form

$$a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \cdots + a_s x_s^k - b$$

over a field $K$ complete under a discrete non-archimedian valuation $a_1, a_2, \ldots, a_s$, being integral elements $\in K$.

The situation is in some sense analogous to the homogeneous case mentioned above. Let, for instance, $K = R_3$ be the rational 3-adic field. The congruence $4 \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \pmod 3$ has solutions with integral $x_i \in R_3$. But $4 \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \pmod{3^2}$ has not a solution with integral $x_i \in R_3$. Hence $4 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ is not soluble with *integral* elements $\in R_3$.

We shall show that under suitable suppositions (but far not always!) the solvability of such equations can be assured by taking a sufficiently large number of summands.

There is an important remark to the example just discussed. If we admit $x_1, x_2, x_3$ to be any elements $\in R_3$ the equation $4 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ has in $R_3$ a solution. It is well known that every rational number is a sum of three rational cubes. In our case we have f. i. $4=\left(\frac{12}{25}\right)^3+\left(\frac{47}{30}\right)^3+\left(\frac{53}{150}\right)^3$. Of course $\frac{47}{30}$ and $\frac{53}{150}$ are not integral elements $\in R_3$. This shows clearly the distinction between the solution of equations from $K$ in integral and non necessarily integral elements $\in K$. It will be good to keep it in mind since we shall be mostly concerned (in essential) with solutions in integral elements $\in K$.

We shall use the following notations. $K$ denotes a field, complete under a discrete non-archimedian valuation. Let $I$ be the ring of integers $\in K$, $\pi$ a local prime of $K$, $\mathfrak{p}=\pi I$ the prime ideal generated by $\pi$. We shall assume that the residue class field $\bar{I}=I/\mathfrak{p}$ is a finite field. The residue class containing the element $a\in I$ will be denoted by $\bar{a}$. If $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is a polynomial with coefficients in $I$ the symbol $\bar{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denotes the corresponding polynomial with coefficients in $\bar{I}$. (In section III the symbol $\bar{a}$ has a somewhat different meaning.)

We shall study two cases:

*A*. The field $K$ has characteristic 0. It is the derived field of an algebraic number field $R(\vartheta)$ complete under a valution corresponding to a prime ideal $\mathfrak{p}$ of $J[\vartheta]$[1]), i. e. $K=R(\vartheta)_{\mathfrak{p}}$.

*B*. $K$ has characteristic $p$. $K$ is the field of formal power series in $x$ (containing only a finite number of negative powers) with coefficients in a finite field $GF(p^f)$.

In both cases every element $a\in K$ is representable in the form of an infinite series (with the known definition of convergence)

$$a=\frac{1}{\pi^\nu}(a_0+a_1\pi+a_2\pi^2+\cdots),\quad \nu \gtreqless 0,\ a_0\neq 0,\ a_i\in\mathfrak{R}. \tag{1}$$

In the case $A$ we can choose $\pi$ as an integer of the field $R(\vartheta)$ with the property $\mathfrak{p}\,\|\,\pi$, i. e. $\pi\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ but $\pi\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}$; $\mathfrak{R}$ denotes an arbitrary fixed complete system of representants of the residue classes mod $\mathfrak{p}$ containing the number 0.

In the case $B$ we can choose $\pi$ to be equal to the indeterminate $x$ and $\mathfrak{R}$ is identified with the field $GF(p^f)$.

If in the case $A$ $N(\mathfrak{p})=p^f$, then the residue classes $I/\mathfrak{p}$ (containing the representantes $a_i\in\mathfrak{R}$) form in both cases a field isomorphic to $GF(p^f)$.

---

[1]) $R(\vartheta)$ denotes a simple algebraic extension of the field of rational numbers $R$. $J[\vartheta]$ is the ring of algebraic integers $\in R(\vartheta)$.

I.

The main result of this section, in which we restrict the considerations to the case $(k,p)=1$, is based on the Theorem 1. The proof holds in exactly the same way for both cases $A, B$.

Theorem 2. *Let $K$ be a discretely valued complete field of the type $A$ or $B$.*

*a) Let $k>1$ be an integer*[2]), $(k,p)=1$.

*b) Let be* $1 \leqq (k, p^f-1)=\delta \leqq p-1$.

*c) Let $a_1, a_2, \ldots, a_{\delta+1}$ be $\delta+1$ integral elements $\in K$,* $a_1 \cdot a_2 \ldots a_{\delta+1} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$.

*Then every $a \in K$ can be written in the form*

(2) $$a_1\xi_1^k + a_2\xi_2^k + \cdots + a_{\delta+1}\xi_{\delta+1}^k,$$

*i. e. the equation*

$$a_1x_1^k + a_2x_2^k + \cdots + a_{\delta+1}x_{\delta+1}^k = a$$

*has for every $a \in K$ a solution $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\delta+1} \in K$.*

Proof. 1. Let $a$ be of the form (1). If $\nu>0$ we can arrange it (by multiplication) that the number $\nu$ in the denominator is a multiple of $k$ and has the form

$$a = \frac{1}{\pi^{lk}}(b_0 + b_1\pi + \cdots + b_{k-1}\pi^{k-1} + b_k\pi^k + \cdots)$$

($l$ an integer). It is further possible to choose $l$ so that at least one of the elements $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ is different from zero.[3]) Our theorem will be proved if we show that the element

$$b = b_0 + b_1\pi + b_2\pi^2 + \cdots, \qquad b_i \in \mathfrak{R}$$

can be written in the form (2).

2. In what follows we denote

(3) $$f(\mathbf{x}) = a_1x_1^k + a_2x_2^k + \cdots + a_\delta x_\delta^k - b.$$

Let $V_\delta$ be the $\delta$-dimensional vector space over $K$. A vector $\mathbf{v}=[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\delta]$, $\xi_i \in K$ will be called *primitive* if

a) $\xi_i \in I$ for every $i$ $(1 \leqq i \leqq \delta)$,

---

[2]) The case $k=1$ is trivial.

[3]) To this end it is sufficient to find $l$ with the property $0 \leqq lk-\nu < k$ and to write $a = \frac{1}{\pi^{lk}}(a_0\pi^{lk-\nu} + a_1\pi^{lk-\nu+1} + \cdots)$.

b) there exists at least one $i$ with $\xi_i \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$.

If the coordinates of the vector $\mathbf{v}$ satisfy the equation $f(\mathbf{x})=0$ we write $f(\mathbf{v})=0$.

3. Suppose first that $b \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. According to Theorem 1 $\bar{f}(\mathbf{x})=\bar{0}$ has a solution with $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \in \bar{I}$, i. e. there exists a vector $\mathbf{v}_1=[\xi_{11}, \xi_{21}, \ldots, \xi_{\delta 1}]$ such that $f(\mathbf{v}_1) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. This vector is primitive since otherwise it would be $b \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ contrary to the supposition.

Let be $f(\mathbf{v}_1)=f(\xi_{11}, \ldots, \xi_{\delta 1})=c \cdot \pi^m$, $m \geqq 1$, where $\pi^m \| f(\mathbf{v}_1)$ and $c \in I$. Hence $f(\mathbf{v}_1) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^m}$.

Find a vector $[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\delta]$ satisfying the relation

$$c+\sum_{i=1}^{\delta} k a_i \xi_{i1}^{k-1} \eta_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{4}$$

Since $c \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ and for at least one $i$ $k a_i \xi_{i1}^{k-1} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ such a vector exists. Put $\xi_{i2}=\xi_{i1}+\eta_i \pi^m$ and consider the primitive vector $\mathbf{v}_2=[\xi_{12}, \xi_{22}, \ldots, \xi_{\delta 2}]$. It holds

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_2) &= \sum_{i=1}^{\delta} a_i (\xi_{i1}+\eta_i \pi^m)^k - b = \\ &= f(\mathbf{v}_1)+\sum_{i=1}^{\delta} a_i k \xi_{i1}^{k-1} \eta_i \pi^m + \sum_{i=1}^{\delta} \binom{k}{2} \xi_{i1}^{k-2} \eta_i^2 \pi^{2m} + \cdots = \\ &= \pi^m \left[c+\sum_{i=1}^{\delta} k a_i \xi_{i1}^{k-1} \eta_i\right] + \pi^{2m} \sum_{i=1}^{\delta} \binom{k}{2} a_i \xi_{i1}^{k-2} \eta_i^2 + \cdots . \end{aligned}$$

For $l \geqq 2$ we have $lm \geqq m+1$; with respect to (4) we get

$$f(\mathbf{v}_2) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{m+1}}.$$

This rule can be repeated. Let be $f(\mathbf{v}_2)=c' \cdot \pi^{m'}$, $m' \geqq m+1$, $\pi^{m'} \| f(\mathbf{v}_2)$ and $c' \in I$. Hence $f(\mathbf{v}_2) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{m'}}$. Find a vector $[\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\delta]$ satisfying

$$c'+\sum_{i=1}^{\delta} k a_i \xi_{i2}^{k-1} \zeta_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Such a vector exists. Let us put $\xi_{i3}=\xi_{i2}+\zeta_i \pi^{m'}$. Then the primitive vector $\mathbf{v}_3=[\xi_{13}, \xi_{23}, \ldots, \xi_{\delta 3}]$ satisfies the relation

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_3) = \sum_{i=1}^{\delta} a_i (\xi_{i2}+\zeta_i \pi^{m'})^k - b = \pi^{m'} \left[c'+\sum_{i=1}^{\delta} k a_i \xi_{i2}^{k-1} \zeta_i\right] + \\ + \pi^{2m'} \sum_{i=1}^{\delta} \binom{k}{2} a_i \xi_{i2}^{k-2} \zeta_i^2 + \cdots, \end{aligned}$$

i. e.

$$f(\mathbf{v}_3) = 0 \pmod{\mathfrak{p}^{m'+1}}.$$

By this rule a sequence of primitive vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots$ can be found such that $f(\mathbf{v}_i) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{m+i}}$.

Since the ring $I$ and the set of integral elements of $K$ which are $\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ are both compact there exists a subsequence of the sequence $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots$ which converges to a primitive vector $\mathbf{v} = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\delta]$. (By the convergence of a sequence of vectors we mean here the componentwise convergence.) Since $f(\mathbf{x})$ is a continuous function we get $f(\mathbf{v}) = 0$. Our theorem in the case $b \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ is proved even with the sharper result that we can choose $x_{\delta+1} = 0$.

4. Let be $b \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. The rule just applied cannot be used since Theorem 1 does not assure the existence of a primitive vector $\mathbf{v}_1$ satisfying $f(\mathbf{v}_1) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$.

Consider therefore the element $d = b - a_{\delta+1}$. Since $d \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ there exists a primitive vector $\mathbf{v} = [\xi_1, \ldots, \xi_\delta]$ such that

$$b - a_{\delta+1} = a_1 \xi_1^k + \cdots + a_\delta \xi_\delta^k.$$

Hence it is

$$b = a_1 \xi_1^k + \cdots + a_\delta \xi_\delta^k + a_{\delta+1} \cdot 1^k.$$

Theorem 2 is completely proved.

It follows from the proof of Theorem 2 and the remark under 4 above the validity of the following

Theorem 2a. *Let the suppositions of Theorem 2 be satisfied with the modification that we have only $\delta$ integral elements $a_1, a_2, \ldots, a_\delta \in K$, where $a_1 \cdot a_2 \cdots a_\delta \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Then, if the congruence*

$$a_1 x_1^k + \cdots + a_\delta x_\delta^k \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

*has at least one non-zero solution, then every element $b \in K$ can be written in the form*

$$b = a_1 \xi_1^k + \cdots + a_\delta \xi_\delta^k, \quad \xi_i \in K.$$

Remark 1. The result of Theorem 2 is sharp in the sense that, in general, the number $\delta + 1$ cannot be replaced by a less one. We show this on an example in the rational $p$-adic field $R_p$.

Choose $p = 7$, $k = 2$ (hence $\delta = 2$) and $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. According to Theorem 2 every $a \in R_7$ can be written in the form

$$a = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \xi_i \in R_7.$$

But it is not true that $a = 7$ can be written in the form

$$7 = \xi_1^2 + \xi_2^2. \tag{5}$$

We show first that if (5) holds then $\xi_1, \xi_2$ are necessarily integral elements $\in R_7$. Let be

$$\xi_1 = \frac{1}{7^\mu}(\xi_{10} + \xi_{11}\cdot 7 + \xi_{12}\cdot 7^2 + \cdots),\ \xi_{10} \neq 0,$$

$$\xi_2 = \frac{1}{7^\nu}(\xi_{20} + \xi_{21}\cdot 7 + \xi_{22}\cdot 7^2 + \cdots),\ \xi_{20} \neq 0,$$

$\xi_{ik} \in \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R} = \{0, 1, \ldots, 6\}$, $\mu > 0$, $\nu > 0$. Without loss of generality suppose $\mu \geqq \nu$.[4]) The condition (5) implies

$$7 = \frac{1}{7^{2\mu}}(\xi_{10} + \cdots)^2 + \frac{1}{7^{2\nu}}(\xi_{20} + \cdots)^2, \tag{6}$$

i. e.

$$7^{2\mu+1} - (\xi_{10} + \cdots)^2 - 7^{2(\mu-\nu)}\cdot(\xi_{20} + \cdots)^2 = 0.$$

If $\mu - \nu > 0$ there would be $\xi_{10} \equiv 0 \pmod 7$, contrary to the assumption. If $\mu - \nu = 0$ we get $\xi_{10}^2 + \xi_{20}^2 \equiv 0 \pmod 7$, which can be satisfied only with $\xi_{10} = \xi_{20} = 0$, again contrary to the supposition.

Now, we show that there cannot exist integral elements

$$\xi_i = \xi_{i0} + \xi_{i1}\cdot 7 + \xi_{i2}\cdot 7^2 + \cdots,\quad \xi_{ik} \in \mathfrak{R}\quad (i = 1, 2)$$

satisfying (5). Substituting in (5) we get $\xi_{10}^2 + \xi_{20}^2 \equiv 0 \pmod 7$. This implies $\xi_{10} = \xi_{20} = 0$. But then (5) gives

$$7 = (7\xi_{11} + \cdots)^2 + (7\xi_{21} + \cdots)^2,$$

i. e. $7 \equiv 0 \pmod{7^2}$, what is impossible.

Remark 2. It follows from the proof of Theorem 2 that under the suppositions $a$)—$c$) every integral element $\in K$ can be written in the form (2) with integral $\xi_1, \ldots, \xi_{\delta+1} \in K$.

We show on an example that in the representation of an integral element $a \in K$ by means of integral $\xi_1, \ldots, \xi_{\delta+1} \in K$ the condition $(k, p^f - 1) \leqq p - 1$ cannot be replaced by a less sharp condition.[5])

Let $K$ be the derived field of the Gaussian field $R(i)$ complete under the $\mathfrak{p}$-adic valuation, where $\mathfrak{p} = [7]$. We have $N(\mathfrak{p}) = 7^2$. Choose $k = 8$; then $\delta = (8, 7^2 - 1) = 8 > 6$. We can take $\pi = 7$. Every integral element $\in K$ is of the form

$$\xi = \xi_0 + \xi_1\cdot 7 + \xi_2\cdot 7^2 + \cdots \qquad \xi_i \in \mathfrak{R},$$

---

[4]) If $\mu > 0$ then we have also $\nu > 0$. For $\mu > 0, \nu \leqq 0$ would imply that the right hand side of (6) is a non-integral element $\in R_7$, whereas the left hand side is clearly an integral element $\in R_7$.

[5]) It remains open whether the condition $(k, p^f - 1) \leqq p - 1$ can be replaced by a less sharp if we admit for $\xi_1, \ldots, \xi_{\delta+1}$ any numbers $\in K$.

where $\mathfrak{R}$ denotes f. i. the numbers $a+bi$ $(a, b=0, 1, \ldots, 6)$. We show that it is not possible to write $i \in K$ as a sum of eighth powers of integral elements $\in K$. The relation

$$i=\sum_{k=1}^{s}(\xi_{0k}+\xi_{1k}\cdot 7+\xi_{2k}\cdot 7^2+\cdots)^8,\ \xi_{lk}\in\mathfrak{R},$$

would imply

$$i \equiv \sum_{k=1}^{s} \xi_{0k}^8 \qquad (\text{mod } [7]). \tag{7}$$

But for every number $a+bi$ it holds

$$(a+bi)^8=a^8+8a^7bi+\cdots+8ab^7i^7+b^8\equiv a^8+b^8+abi(a^6-b^6) \qquad (\text{mod } [7]).$$

If at least one of the numbers $a, b$ is equal to zero we have $ab\equiv 0$ (mod [7]). If $a \neq 0$, $b \neq 0$ we have $a^6-b^6\equiv 1-1=0$ (mod [7]). In both cases we have therefore

$$\xi_{0k}^8=(a_k+ib_k)^8\equiv a_k^8+b_k^8\equiv a_k^2+b_k^2 \qquad (\text{mod } [7]).$$

The relation (7) implies

$$i\equiv\sum_{k=1}^{s}(a_k^2+b_k^2) \qquad (\text{mod } [7]),$$

what is impossible, since a number of the form $\frac{1}{7}\left[i-\sum_{k=1}^{s}(a_k^2+b_k^2)\right]$ is not an algebraic integer of the field $R(i)$.

Remark 3. Let $K=R_p$ be the rational $p$-adic field. Suppose $p>2$. If we apply the result of Theorem 2 and 2a to the case $k=2$ we get well-known results concerning quadratic forms. Let $a_1, a_2, a_3$ be arbitrary integral elements $\in R_p$, $a_1a_2a_3\not\equiv 0 \pmod p$.[6]) Every number $a\in R_p$ can be written in the form

$$a=a_1\xi_1^2+a_2\xi_2^2+a_3\xi_3^2.$$

For every integral $b\not\equiv 0 \pmod p$ and arbitrary integral $a_1, a_2\in R_p$ with $a_1a_2\not\equiv 0 \pmod p$ it is even possible to writte $b=a_1\xi_1^2+a_2\xi_2^2$, $\xi_i\in R_p$.

These and analogous results concerning quadratic forms are treated in detail in the book of B. W. Jones [5].

[6]) The condition $a_1a_2a_3\not\equiv 0 \pmod p$ cannot be replaced by the weaker condition $a_1a_2a_3\neq 0$, since for instance the equation $6=x_1^2+x_2^2+3x_3^2$ is not soluble in $R_3$ with integral $x_1, x_2, x_3\in R_3$.

## II.

In theorem 2 we supposed nothing about the characteristic of the field $K$ (i. e. there was not necessary to distinguish between the cases $A$ and $B$). But it was of course essential that $(k, p) = 1$. The difficulties which made impossible to prove Theorem 1 in the case $(k, p) > 1$ are clearly to see for instance in the equation (4) since this equation reduces in this case to a contradiction $c \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$.

In the following we shall give a full discussion of the case $(k, p) \geqq 1$. Write $k = k_0 p^t$, $(k_0, p) = 1$, $t \geqq 0$.

The case $B$, where the fields $K$ and $I/\mathfrak{p}$ have both characteristic $p$, can be settled at once.

*Suppose $t > 0$. Let $a_1, a_2, \ldots, a_s$ be integral elements $\in K$. The equation*

(8) $$a = a_1 \xi_1^k + \cdots + a_s \xi_s^k$$

*need not have for any $s > 0$ a solution with $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s \in K$.*[7])

Every element $a \in K$ can be written in the form of a formal power series in the indeterminate $x$

$$a = a_{-\nu} x^{-\nu} + \alpha_{-\nu+1} x^{-\nu+1} + \cdots + \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots,$$

$\alpha_i \in \mathfrak{R} = GF(p^f) \cong I\,[x]$. The $k$-th power of $a \in K$ is of the form

$$a^k = (\alpha_{-\nu} x^{-\nu} + \cdots + \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots)^{k_0 p^t} =$$
$$= [\alpha_{-\nu}^{p^t} \cdot x^{-\nu p^t} + \alpha_{-\nu+1}^{p^t} x^{(-\nu+1) p^t} + \cdots + \alpha_0^{p^t} + \alpha_1^{p^t} x^{p^t} + \alpha_2^{p^t} \cdot x^{2 p^t} + \cdots]^{k_0}.$$

We show easily that the element $x$ cannot be written as a sum of $k$-th powers of elements $\in K$.[8]) For if it were

$$x = \sum_{i=1}^{s} \xi_i^k = \sum_{i=1}^{s} [x^{-\nu_i} (\xi_{i0} + \xi_{i1} x + \xi_{i2} x^2 + \cdots)]^k, \qquad \xi_{il} \in \mathfrak{R}$$

it would hold also

$$x = \sum_{i=1}^{s} [x^{-\nu_i p^t} (\xi'_{i0} + \xi'_{i1} x^{p^t} + \xi'_{i2} x^{2 p^t} + \cdots)]^{k_0},$$

where $\xi'_{il} = \xi_{il}^{p^t}$. Without loss of generality suppose $\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \cdots \geqq \nu_s$. We have

$$x^{\nu_1 k_0 p^t + 1} = (\xi'_{10} + \xi'_{11} x^{p^t} + \cdots)^{k_0} + x^{(\nu_1 - \nu_2) k_0 p^t} (\xi'_{11} + \xi'_{12} x^{p^t} + \cdots)^{k_0} + \cdots +$$
$$+ x^{(\nu_1 - \nu_s) k_0 p^t} (\xi'_{1s} + \xi'_{2s} x^{p^t} + \cdots)^{k_0}.$$

---

[7]) Independently of the fact whether $(k, p^f - 1) \leqq p - 1$ holds or not.

[8]) I. e. we put in (8) $a_1 = a_2 = \cdots = a_s = 1$.

Hence (since clearly $\nu_1$ must be $\geqq 0$)

(9) $$x^{\nu_1 k_0 p^t+1} \equiv \eta_0 + \eta_1 x^{p^t} + \eta_2 x^{2p^t} + \cdots + \eta_{\nu_1 k_0} x^{\nu_1 k_0 p^t} \pmod{x^{(\nu_1 k_0+1)p^t}}$$

with some $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\nu_1 k_0} \in \Re$.

Since $t \geqq 1, p \geqq 2$, we have $p^t \geqq 2$. On the right hand side of the equation (9) we have a polynomial in $x^{p^t}$. But the exponent $\nu_1 k_0 p^t + 1$ on the left hand side of (9) is clearly not divisible by $p^t$. Such a relation is impossible and our assertion is proved.

## III.

In the following we shall restrict the considerations to the case of a derived field of an algebraic number field $R(\vartheta)$, complete under a $\mathfrak{p}$-adic valuation. This field will be denoted by $K = R(\vartheta)_\mathfrak{p}$. The symbol $J[\vartheta]$ denotes the ring of algebraic integers of the field $R(\vartheta)$.

We prove a series of lemmas with the final aim to prove a theorem analogous to Theorem 1 dealing with the finite ring $J[\vartheta]/\mathfrak{p}^{t+1}$ instead of the finite field $J[\vartheta]/\mathfrak{p}$.

Lemmas 1—3 which are well-known in the theory of algebraic numbers are quoted without proofs. (They can be found for instance in O. Ore [8], pp. 51—61.)

Throughout all this section let further be $N(\mathfrak{p}) = p^f$, $f \geqq 1$, $p \geqq 2$.[9]) The polynomial

(10) $$\varphi(x) = x^f + a_1 x^{f-1} + \cdots + a_f$$

denotes an arbitrary (fixed chosen) polynomial of degree $f$ with rational integral coefficients and leading coefficient 1 irreducible (mod $p$).

Lemma 1. *The congruence*

(11) $$\varphi(x) \equiv x^f + a_1 x^{f-1} + \cdots + a_f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

*has just $f$* (mod $\mathfrak{p}$) *distinct solutions* $\in J[\vartheta]$. *If one of the solutions is the number $\alpha \in J[\vartheta]$, then the numbers $\alpha^p, \alpha^{p^2}, \ldots, \alpha^{p^{f-1}}$ are the remaining solutions of* (11).

Lemma 2. *If $\alpha \in J[\vartheta]$ is an arbitrary fixed chosen solution of* (11), *then the numbers*

(12) $$C(\alpha) = c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_{f-1}\alpha^{f-1}$$

($c_i = 0, 1, \ldots, p-1$) *form a complete system of representants of the residue classes* (mod $\mathfrak{p}$).

---

[9]) The restriction $p \geqq 3$ will not be necessary until we treat Theorem 4.

Remark. If $f=1$, the number $\alpha$ does not appear, of course, explicitly in (12).

Lemma 3. *Let $\pi$ be an algebraic number $\in J[\vartheta]$ for which $\mathfrak{p}\|\pi$ holds. Let $u$ be an integer, $u \geqq 0$. Then a complete set of representants of the residue classes* (mod $\mathfrak{p}^{u+1}$) *is given by the following $p^{f(u+1)}=N(\mathfrak{p})^{u+1}$* (mod $\mathfrak{p}^{u+1}$ *incongruent) numbers:*

(13) $$C_0(\alpha)+C_1(\alpha)\cdot\pi+\cdots+C_u(\alpha)\cdot\pi^u.$$

*Here $\alpha \in J[\vartheta]$ is defined as a solution of the congruence* (11) *and the set $C_i(\alpha)$ has a meaning which is clear from the Lemma* 2.

Remark: If $\mathfrak{p}\|p$ we can choose $\pi=p$.

Till to the end of the paper we shall use the following notations. Let be $k=k_0p^t$, $(k_0,p)=1$, $t\geqq 0$. Put $\delta=(k_0,p^f-1)$. The symbol $Z$ denotes the ring of residue classes (mod $\mathfrak{p}^{t+1}$). The symbol $Z_0$ denotes the set of non-zero residue classes (mod $\mathfrak{p}^{t+1}$). The symbol $Z^*$ denotes the group of residue classes (mod $\mathfrak{p}^{t+1}$) which are relatively prime to $\mathfrak{p}$.[10] Finally the symbol $Z^{(k)}$ denotes the set of all non-zero residue classes (mod $\mathfrak{p}^{t+1}$) which are $k$-th powers of residue classes (mod $\mathfrak{p}^{t+1}$).

The elements of the sets $Z, Z_0, Z^*, Z^{(k)}$ are classes mod $\mathfrak{p}^{t+1}$. The class whose representant is the number $n$ will be denoted by $\bar{n}$.

Lemma 4. Let be $k>1$, $k=k_0p^t$, $(k_0,p)=1$, $\mathfrak{p}|p$, $\mathfrak{p}\|\pi$. *Denote* $\lambda=\binom{k}{l}\pi^{l\varrho}$, *where $l,\varrho$ are integers $\geqq 1$. Then,*

*a) for $p\geqq 2$, $1\leqq l\leqq k$, we have $\mathfrak{p}^{t+1}|\lambda$;*
*b) for $p\geqq 3$, $2\leqq l\leqq k$, we have $\mathfrak{p}^{t+2}|\lambda$;*
*c) for $p\geqq 2$, $\varrho>1$, $2\leqq l\leqq k$, we have $\mathfrak{p}^{t+\varrho+1}|\lambda$;*
*d) for $p=2$, $l\geqq 3$, we have $\mathfrak{p}^{t+2}|\lambda$.*

Proof. Let us put $l=l_0\cdot p^\tau$, $(l_0,p)=1$, where $1\leqq\tau\leqq t$. Then [11]

$$\lambda=\binom{k}{l}\pi^{l\varrho}=\frac{k}{l}\binom{k-1}{l-1}\pi^{l\varrho}=\frac{k_0}{l_0}\binom{k-1}{l-1}p^{t-\tau}\pi^{l_0\varrho p^\tau}.$$

Therefore $\lambda$ is divisible by $\mathfrak{p}^\sigma$, where $\sigma\geqq m=t+l_0\varrho p^\tau-\tau$.

In the case $a)$ $: m\geqq t+2^\tau-\tau\geqq t+1$.

In the case $b)$ $: m\geqq t+l_0p^\tau-\tau=t+l-\tau$. If $\tau=0$, we have $m\geqq t+l\geqq t+2$. If $\tau>0$, we have $m\geqq t+3^\tau-\tau\geqq t+2$.

The case $c)$. If $\tau=0$, we have $m=t+l\varrho-\tau=t+l\varrho\geqq t+2\varrho\geqq t+\varrho+1$. If $\tau\geqq 1$, we have $m\geqq t+1\cdot 2^\tau\cdot\varrho-\tau\geqq t+2\varrho-1\geqq t+\varrho+1$.

---

[10]) Let us recall that the group $Z^*$ is — in general — not cyclic.

[11]) The symbol $\binom{k-1}{0}$ denotes 1.

The case $d$). If $\tau=0$, we have $m=t+l\varrho\geqq t+3$. If $\tau>0$ and it holds $l=l_0\cdot 2^\tau\geqq 3$, then we have $\alpha$) either $\tau=1$, $l_0\geqq 3$, $\beta$) or $\tau\geqq 2$. In the case $\alpha$) we have $m\geqq t+l_0p^\tau-\tau=t+3\cdot 2-1=t+5$. In the case $\beta$) we get $m\geqq t+l_0 2^2-2\geqq t+2$.

This proves Lemma 4.

Lemma 5. *Let $\alpha, \beta$ be two numbers $\in J[\vartheta]$. Then* $\alpha\equiv\beta \pmod{\mathfrak{p}}$ *implies* $\alpha^{p^t}\equiv\beta^{p^t} \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$.

Proof: Well-known.

Lemma 6. *We find all elements of the set $Z^{(k)}$ among the classes which are represented by the numbers*

$$[c_0+c_1\alpha+\cdots+c_{f-1}\alpha^{f-1}]^k \qquad \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$$

$(c_i=0, 1, \ldots, p-1)$. *Among these classes there exist precisely* $\dfrac{p^f-1}{\delta}$ *non-zero distinct classes. Each of these non-zero classes* $\pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$ *is at the same time a non-zero class* $\pmod{\mathfrak{p}}$ [12])

Proof. With respect to (12) the representant of every class $\overline{\omega}\in Z^{(k)}$ can be written in the form

$$\begin{aligned}\omega&\equiv[C_0(\alpha)+C_1(\alpha)\cdot\pi+\cdots+C_t(\alpha)\cdot\pi^t]^k\equiv\\&\equiv[C_0(\alpha)+\pi\cdot D(\alpha)]^k, \qquad \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}},\end{aligned}$$

where

$$D(\alpha)=C_1(\alpha)+C_2(\alpha)\cdot\pi+\cdots+C_t(\alpha)\,\pi^{t-1}.$$

Hence it is

$$\omega\equiv C_0(\alpha)^k+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\pi^i C_0(\alpha)^{k-i}D(\alpha)^i. \tag{14}$$

According to Lemma 4a every member of the second summand in (14) is $\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$, i. e.

$$\omega\equiv C_0(\alpha)^k=(c_0+c_1\alpha+\cdots+c_{f-1}\alpha^{f-1})^{k_0p^t} \qquad \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}.$$

This proves the first assertion of Lemma 6.

We wish to establish now how many among the numbers

$$[c_0+c_1\alpha+\cdots+c_{f-1}\alpha^{f-1}]^k,\ 0\leqq c_i\leqq p-1 \tag{15}$$

are distinct $\pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$.

---

[12]) This means: among the numbers which are not relatively prime to $\mathfrak{p}$ only the number 0 is a $k$-th power $\pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$. This is in general not true for $k$-th power residues $\pmod{\mathfrak{p}^{t+2}}$. For instance: take in the field of rational numbers $k=2$, $p=2$. Then the quadratic residues (mod 8) are the numbers 0, 1, 4. Here 4 is divisible by $p=2$. Hence the squares $\neq 0$ do not form a group.

Let us establish first how many of the numbers (15) are different (mod $\mathfrak{p}$). We have clearly

$$\omega = [c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_{f-1}\alpha^{f-1}]^{k_0 p^t} \equiv [c_0 + c_1\alpha^{p^t} + c_2\alpha^{2p^t} + \cdots + c_{f-1}\alpha^{(f-1)p^t}]^{k_0} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

According to Lemma 1 the number $\alpha^{p^t} = \beta$ is one of the solutions of the congruence (11). Write

(16) $$\omega \equiv (c_0 + c_1\beta + c_2\beta^2 + \cdots + c_{f-1}\beta^{f-1})^{k_0} \pmod{\mathfrak{p}}$$

The non-zero classes (mod $\mathfrak{p}$) form a cyclic group of order $p^f - 1$. The classes which are $k_0$-th powers form a subgroup of index $\delta = (k_0, p^f - 1)$. Hence among the classes represented by the numbers (15) there exist just $\frac{p^f-1}{\delta}$ non-zero different classes (mod $\mathfrak{p}$). Therefore there exist at least $\frac{p^f-1}{\delta}$ different classes (mod $\mathfrak{p}^{t+1}$).

The symbol $\omega(\omega', \omega'')$ denotes in the following numbers belonging to the set (15). We shall show that even (mod $\mathfrak{p}^{t+1}$) there exist among the numbers (15) exactly $\frac{p^f-1}{\delta}$ different numbers. To this end *it is sufficient to prove* that $\omega' \equiv \omega''$ (mod $\mathfrak{p}$) implies $\omega' \equiv \omega''$ (mod $\mathfrak{p}^{t+1}$).

Let be

(17) $$\omega' = (c_0' + c_1'\alpha + \cdots + c_{f-1}'\alpha^{f-1})^k \equiv \omega'' = (c_0'' + c_1''\alpha + \cdots + c_{f-1}''\alpha^{f-1})^k \pmod{\mathfrak{p}},$$

i. e.

(18) $$\omega' \equiv (c_0' + c_1'\beta + \cdots + c_{f-1}'\beta^{f-1})^{k_0} \equiv \omega'' \equiv (c_0'' + c_1''\beta + \cdots + c_{f-1}''\beta^{f-1})^{k_0} \pmod{\mathfrak{p}},$$

where $\beta = \alpha^{p^t}$.

According to FERMAT's theorem $\alpha \equiv \alpha^{p^f} \equiv \alpha^{p^{2f}} \equiv \alpha^{p^{3f}} \equiv \cdots$ (mod $\mathfrak{p}$). Let $r$ be an integer such that $rf < t \leqq (r+1)f$. Raise (18) to the power $\nu = p^{(r+1)f-t}$. Since $\beta^\nu \equiv \alpha^{\nu p^t} \equiv \alpha^{p^{(r+1)f}} \equiv \alpha$ (mod $\mathfrak{p}$) and $c_i^\nu \equiv c_i$ (mod $\mathfrak{p}$) we get

$$(c_0' + c_1'\alpha + \cdots + c_{f-1}'\alpha^{k-1})^{k_0} \equiv (c_0'' + c_1'' + \cdots + c_{f-1}''\alpha^{f-1})^{k_0} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

If we denote

$$\lambda' = (c_0' + c_1'\alpha + \cdots + c_{f-1}'\alpha^{f-1})^{k_0},$$
$$\lambda'' = (c_0'' + c_1''\alpha + \cdots + c_{f-1}''\alpha^{f-1})^{k_0},$$

we get

(19) $$\lambda' \equiv \lambda'' \pmod{\mathfrak{p}}$$

According to Lemma 5 it follows from (19)

$$\lambda'^{p^t} \equiv \lambda''^{p^t} \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}},$$

i. e.

$$(c_0'+c_1'\alpha+\cdots+c_{f-1}'\alpha^{f-1})^k\equiv(c_0''+c_1''\alpha+\cdots+c_{f-1}''\alpha^{f-1})^k \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$$

$$\omega'\equiv\omega'' \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}. \tag{20}$$

This proves Lemma 6.

The numbers (15) (with exception of zero) are not divisible by $\mathfrak{p}$. This remark enables to prove at once the following

Lemma 7. a) *The set $Z^{(k)}$ forms a group, $Z^{(k)}\subset Z^{(*)}$.* b) *For the index $[Z^*:Z^{(k)}]$ we have $[Z^*:Z^{(k)}]=p^{ft}\cdot\delta$.*

Proof. The statement a) is clear from the precedent. The order of the group $Z^*$ is

$$\varphi(\mathfrak{p}^{t+1})=N(\mathfrak{p}^{t+1})\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)=p^{ft}(p^f-1).$$

According to Lemma 6 the order of the group $Z^{(k)}$ is $\frac{p^f-1}{\delta}$. Hence

$$\text{index}\,[Z^*:Z^{(k)}]=p^{ft}(p^f-1):\frac{p^f-1}{\delta}=p^{ft}\cdot\delta.$$

Lemma 8. *Let $\bar n\neq\bar 0$ be an arbitrary element $\in Z$. Every complex $\bar n Z^{(k)}$ contains precisely $\frac{p^f-1}{\delta}$ different elements.*

Remark. The set $Z$ (with respect to multiplication) is not a group, merely a semigroup. For $\bar n\in Z^*$ the assertion of the Lemma is an elementary fact of the theory of groups (since $Z^{(k)}$ is a subgroup of $Z^*$). It is important that the lemma holds also for $\bar n\in Z-Z^*$.

Proof. Let $\bar\xi^k, \bar\eta^k$ be two elements $\in Z^{(k)}$. It is sufficient to prove: if $\bar n$ is a non-zero class $\pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$, then

$$n\xi^k\equiv n\eta^k \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}} \quad\text{implies}\quad \xi^k\equiv\eta^k \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}.$$

Let be $\mathfrak{p}^j\|[n]$, $0\leq j<t+1$. Then $\mathfrak{p}^{t+1}\mid n(\xi^k-\eta^k)$ implies $\mathfrak{p}^{t+1-j}\mid\xi^k-\eta^k$, i. e. $\xi^k\equiv\eta^k \pmod{\mathfrak{p}^{t+1-j}}$. The more there is therefore

$$\xi^k\equiv\eta^k \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{21}$$

In the same manner as we deduced (20) from (17) we can deduce from (21) $\xi^k\equiv\eta^k \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$. This proves Lemma 8.

Lemma 9. *Two complexes $\bar n_1 Z^{(k)}, \bar n_2 Z^{(k)}, \bar n_1, \bar n_2\in Z$ ($\bar n_1, \bar n_2$ — non-zero classes) are either disjoint or identical.*

Proof. Suppose that the intersection is non vacuous, i. e. there exist two elements $\bar\xi^k, \bar\eta^k\in Z^{(k)}$ such that $\bar n_1\bar\xi^k=\bar n_2\bar\eta^k$, i. e. $n_1\xi^k\equiv n_2\eta^k \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$. Since $\bar\xi^k\in Z^*$, there exists an element $\bar\xi_1^k\in Z^*$ such that $\xi^k\xi_1^k\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$.

Hence we have $n_1 \equiv n_2(\xi_1 \eta_j)^k \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$. Therefore $\bar{n}_1 Z^{(k)} = \bar{n}_2(\overline{\eta_j \xi_1})^k Z^{(k)} = \bar{n}_2 Z^{(k)}$, which proves the lemma.

A corollary of the lemmas proved above is the

Lemma 10. *The ring $Z$ of residue classes* $\pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$ *is a sum of* $\frac{p^{f(t+1)}-1}{p^f-1}\delta+1$ *disjoint complexes of the form $\bar{n}Z^{(k)}$. One of the complexes contains a single element* 0, *every of the remaining complexes contains exactly* $\frac{p^f-1}{\delta}$ *elements.*

Therefore it is possible to write the ring $Z$ (in a unique way) as a sum of disjoint summands

$$Z = \bar{0} + \bar{n}_1 Z^{(k)} + \bar{n}_2 Z^{(k)} + \cdots + \bar{n}_s Z^{(k)}, \tag{22}$$

where $\bar{n}_1 = \bar{1}$, $\bar{n}_i \in Z$, $s = \frac{p^{f(t+1)}-1}{p^f-1}\delta$.

In lemmas 11 and 12 we shall prove the possibility to choose the number $\alpha \in J[\vartheta]$ in a special way which turns out to be essential for the proof of Theorem 3.

Lemma 11. *Let be* $f \geqq 1$, $\delta = (k_0, p^f-1) \leqq p-1$. *Then there exists a polynomial* $\varphi(x)$ *irreducible* $\pmod p$ *of degree $f$ which divides* $\pmod p$ *the polynomial*

$$x^{\frac{p^f-1}{\delta}}-1. \tag{23}$$

Proof.[13]) Let be $f > 1$. Every irreducible polynomial $\pmod p$ of degree $f$ divides

$$x^{p^f-1}-1. \tag{24}$$

The polynomial (23) divides the polynomial (24). We shall show that the sum of degrees of all irreducible polynomials dividing (23) with a degree $< f$ is less than the number $\frac{p^f-1}{\delta}$. This will prove Lemma 11. For, first (23) has not $\pmod p$ factors of degree $> f$, secondly the sum of degrees of all $\pmod p$ irreducible polynomials dividing (23) is exactly $\frac{p^f-1}{\delta}$. Hence (23) has at least one factor of degree $f$.

The polynomial (23) has only irreducible factors of a degree $d$, where $d/f$. Such an irreducible factor of degree $d$ divides $x^{p^d}-x$. Therefore the sum

[13]) See [9], p. 125. For $f=1$ the lemma is trivial.

of degrees of all irreducible factors of degree $d$ is at most $p^d$. The sum of degrees of all irreducible factors of (23) of degree $< f$ is less then the number

$$\sigma = \sum_{d/f,\, d<f} p^d.$$

Hence

$$\sigma \leqq \sum_{d=1}^{f-1} p^d < 1 + \sum_{d=1}^{f-1} p^d = \frac{p^f - 1}{p-1} \leqq \frac{p^f-1}{\delta},$$

i. e. $\sigma < \frac{p^f-1}{\delta}$ This proves our Lemma.

Lemma 12. *The number $\alpha$ in Lemma 2 (or 3) can be chosen in such a manner that*

$$\alpha \equiv \beta^k \qquad (\text{mod } \mathfrak{p}^{t+1}),$$

*where $\beta \in J[\vartheta]$.*

Proof. Let us choose for the polynomial (11) such an irreducible polynomial $\varphi(x)$ of degree $f$ which divides (23) According to Lemma 11 this is possible. The root $\alpha_1 \in J[\vartheta]$ of the congruence

(25) $$\varphi(x) \equiv x^f + a_1 x^{f-1} + \cdots + a_f \equiv 0 \quad (\text{mod } \mathfrak{p})$$

satisfies the more the congruence

$$x^{\frac{p^f-1}{\delta}} - 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod } \mathfrak{p}).$$

We have therefore

(26) $$\alpha_1^{\frac{N(\mathfrak{p})-1}{\delta}} \equiv 1 \;(\text{mod } \mathfrak{p}), \quad \delta = (k_0, N(\mathfrak{p}) - 1).$$

It is well-known that (26) is satisfied by those and only those numbers $\alpha_1 \in J[\vartheta]$ which are $k_0$-th powers (mod $\mathfrak{p}$), i. e. for which

(27) $$\alpha_1 \equiv \beta^{k_0} \quad (\text{mod } \mathfrak{p})$$

holds. Hence every solution of (25) is a $k_0$-th power (mod $\mathfrak{p}$). According to Lemma 5 it follows from (27)

$$\alpha_1^{p^t} \equiv \beta^{k_0 p^t} = \beta^k \qquad (\text{mod } \mathfrak{p}^{t+1}).$$

The number $\alpha_1^{p^t}$ is simultaneously with $\alpha_1$ a solution of (25). Denoting $\alpha = \alpha_1^{p^t}$ we get

$$\alpha \equiv \beta^k \qquad (\text{mod } \mathfrak{p}^{t+1}),$$

which proves our Lemma.

Lemmas 1—12 hold independently whether $\mathfrak{p} \| p$ or only $\mathfrak{p} | p$. From now on suppose explicitly $\mathfrak{p} \| p$. Then in Lemma 3 we can write $p$ instead of $\pi$. Hence the residue classes belonging to $Z$ are just represented by the numbers

(28) $$C_0(\alpha) + C_1(\alpha) p + \cdots + C_t(\alpha) \cdot p^t.$$

By rearranging this expression we see that every number from (28) can be written in the form

$$d_0+d_1\alpha+d_2\alpha^2+\cdots+d_{f-1}\alpha^{f-1},$$

where $d_i$ are rational integers. This implies the validity of the following Lemma

Lemma 13. *Let be $\mathfrak{p}\|p$. Then every element $\in Z$ can be represented by just one of the numbers*

(29) $$\xi=d_0+d_1\alpha+\cdots+d_{f-1}\alpha^{f-1},$$

*where $d_i$ runs through all numbers* $0, 1, 2, \ldots, p^{t+1}-1$.

From now (till to the end of this paper) we shall choose the representants of the classes $\in Z$ exclusively from the set (29). Thus the representant is uniquely determined.

We introduce two notions. The numbers $(d_0, d_1, \ldots, d_{f-1})$ will be called the *coordinates* of the element $\xi$, the number of coordinates different from zero will be called the *length* of the element $\xi$. If $\xi\neq 0$ the length $l$ is an integer, $1\leqq l\leqq f$.

Choose the number $\alpha$ in Lemma 13 so that $\alpha\equiv\beta^k \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$. Then it holds

Lemma 14. *Let $\overline{\xi n}\cdot Z^{(k)}$ be a non-zero complex, $\xi$ of the length $l$. Then there exists a number $\eta$ of the same length $l$ having the first coordinate $d_0\neq 0$ and satisfying the relation*

$$\overline{\xi n}\cdot Z^{(k)}=\overline{\eta}\,\overline{n}\cdot Z^{(k)}.$$

Proof. a) If $f=1$ the assertion is trivial, since the representant of every non-zero complex has the first (and only first) coordinate $\neq 0$.

b) Suppose $f>1$ and $\xi=d_\varrho\alpha^\varrho+d_{\varrho+1}\alpha^{\varrho+1}+\cdots+d_{f-1}\alpha^{f-1}$ $(d_\varrho\neq 0,\ \varrho\geqq 1)$. Since $\alpha$ and therefore $\alpha^\varrho, \alpha^{-\varrho}$ are $k$-th powers $(\bmod\ \mathfrak{p}^{t+1})$ we have $\overline{\alpha}, \overline{\alpha}^\varrho$, $\overline{\alpha}^{-\varrho}\in Z^{(k)}$. Since $Z^{(k)}$ is a group, we get

$$\overline{\xi}\overline{n}Z^{(k)}=\overline{\xi}\overline{n}\overline{\alpha}^{-\varrho}\cdot Z^{(k)}=\overline{\xi\alpha^{-\varrho}}\cdot\overline{n}Z^{(k)}=\overline{\eta}\overline{n}Z^{(k)},$$

where $\eta=d_\varrho+d_{\varrho+1}\alpha+\cdots+d_{f-1}\alpha^{f-\varrho+1}$. This proves the Lemma.

Now we are able to prove the main theorem of this section:

Theorem 3. *Let $R(\vartheta)$ be an algebraic number field of finite degree over the field of rational numbers. Let $J[\vartheta]$ be the integral domain of algebraic integers $\in R(\vartheta)$, $\mathfrak{p}$ a prime ideal of $J[\vartheta]$, $N(\mathfrak{p})=p^f, f\geqq 1, \mathfrak{p}\|p$. Let be further $\delta=(k, p^f-1)\leqq p-1$, $s=\dfrac{p^{f(t+1)}-1}{p^f-1}\delta$. Suppose $a_1, a_2, \ldots, a_s$ are $s$ elements $\in J[\vartheta]$ with $a_1\cdot a_2\cdots a_s\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Then the congruence*

$$b\equiv a_1\xi_1^k+a_2\xi_2^k+\cdots+a_s\xi_s^k \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$$

*has for every $b\in J[\vartheta]$ a solution with $\xi_i\in J[\vartheta]$.*

Remark: In other words: under the above suppositions the equation

$$\bar{b} = \bar{a}_1 \bar{\xi}_1^k + \cdots + \bar{a}_s \bar{\xi}_s^k$$

is solvable in $Z$ for every $\bar{b} \in Z$.[14])

Proof. For $\bar{b} = \bar{0}$ it is sufficient to choose $\xi_i = 0$. Therefore we shall suppose $\bar{b} \in Z_0$.

1. We choose the arrangement of the complexes in the relation

$$Z_0 = \bar{n}_1 Z^{(k)} + \bar{n}_2 Z^{(k)} + \cdots + \bar{n}_s Z^{(k)} \tag{30}$$

in a special way.

First take the complex $\bar{a}_1 Z^{(k)}$. Then we take the complex $\bar{c}_2 \bar{a}_2 Z^{(k)}$, where $c_2$ is chosen as follows. Among all numbers $c_2$ from (29) satisfying the condition

$$\bar{c}_2 \bar{a}_2 Z^{(k)} \subset Z_0 - \bar{a}_1 Z^{(k)} \tag{31}$$

we take those with the smallest length $l_2 \geqq 1$. From them we choose the element $c_2 = c_{02} + c_{12}\alpha + \cdots + c_{f-1,2}\alpha^{f-1}$ such that $c_{02} \neq 0$ and $c_{02}$ has the least possible positive value $\geqq 1$. According to Lemma 14 this is always possible and by Lemma 13 we have $1 \leqq c_{02} \leqq p^{t+1} - 1$.

We show now that (if $s > 1$) an element satisfying (31) really exists. According to the assumption $a_2 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, hence $\bar{a}_2 \in Z^*$.[16]) Let us multiply (30) by $\bar{a}_2 \neq \bar{0}$. We get

$$\bar{a}_2 Z_0 = \bar{n}_1 \bar{a}_2 Z^{(k)} + \bar{n}_2 \bar{a}_2 Z^{(k)} + \cdots + \bar{n}_s \bar{a}_2 Z^{(k)}.$$

Since $\bar{a}_2 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ it holds $\bar{a}_2 Z_0 = Z_0$.[17]) Hence we get

$$Z_0 = \bar{n}_1 \bar{a}_2 Z^{(k)} + \bar{n}_2 \bar{a}_2 Z^{(k)} + \cdots + \bar{n}_s \bar{a}_2 Z^{(k)}. \tag{32}$$

This is a decomposition of $Z_0$ modulo the complex $\bar{a}_2 Z^{(k)}$. Every summand is one of the complexes modulo $Z^{(k)}$. It follows from the equality of both

---

[14]) Theorem 1 is a special case of Theorem 3 (for $t = 0$). In this case the assumption $\mathfrak{p} \| p$ can be replaced by the weaker one $\mathfrak{p} | p$ since in this case Lemma 13 holds without the assumption $\mathfrak{p} \| p$.

At the same time Theorem 3 is a wide generalization of an important theorem used in the Waring problem. (See Landau [6], p. 289, Satz 300 or Vinogradov [11], p. 273.) This theorem is obtained by putting in Theorem 3 $f = 1$, $a_1 = a_2 = \cdots = a_s = 1$. (The condition $\delta \leqq p - 1$ is then automaticly satisfied, what enables much simpler proofs.)

[15]) According to our agreement we choose always the representant $n$ of the class $\bar{n}$ from the set (29).

[16]) The complex $\bar{a}_2 Z^{(k)}$ is one of the cosets of the decomposition of the group $Z^*$ modulo the subgroup $Z^{(k)}$.

[17]) This follows from the fact that $\bar{\xi} \neq \bar{\eta}$ implies $\bar{a}_2 \bar{\xi} \neq \bar{a}_2 \bar{\eta}$. For, $\bar{a}_2 \bar{\xi} = \bar{a}_2 \bar{\eta}$, i. e, $a_2 \xi \equiv a_2 \eta \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$, would imply $\mathfrak{p}^{t+1} | a_2(\xi - \eta)$. Since $\mathfrak{p} \nmid a_2$ we would have $\mathfrak{p}^{t+1} | \xi - \eta$, i. e. $\xi \equiv \eta \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$, $\bar{\xi} = \bar{\eta}$, contrary to the assumption.

sides in (32) that all complexes on the right hand side are disjoint. Hence if $\bar{c}_2$ runs through all elements $\in Z_0$, $\bar{c}_2\bar{a}_2Z^{(k)}$ gives all complexes modulo $Z^{(k)}$ and (if $s>1$) an element $\bar{c}_2$ satisfying (31) really exists.

Take now the complex $\bar{c}_3\bar{a}_3Z^{(k)}$, where $\bar{c}_3$ is chosen as follows. We find all numbers $c_3$ satisfying

(33) $$\bar{c}_3\bar{a}_3Z^{(k)} \subset Z_0 - \bar{a}_1Z^{(k)} - \bar{c}_2\bar{a}_2Z^{(k)}$$

and having the smallest length $l_3>0$. If $s>2$ such a $c_3$ exists. (This can be proved analogously as above.) From all numbers $c_3$ of the length $l_3$ we choose an element

$$c_3 = c_{03} + c_{13}\alpha + \cdots + c_{f-1,\,3}\alpha^{f-1}$$

with $c_{03} \neq 0$, where $c_{03}$ has the least possible positive value $\geqq 1$.

We repeat this process just $s$ times. The last element $c_s = c_{0s} + c_{1s}\alpha + {} + \cdots + c_{f-1,\,s}\alpha^{f-1}$ is chosen as follows. We find first all elements $c_s$ of the least possible length having the property

$$\bar{c}_s\bar{a}_sZ^{(k)} \subset Z_0 - \bar{a}_1Z^{(k)} - \bar{c}_2\bar{a}_2Z^{(k)} - \cdots - \bar{c}_{s-1}\bar{a}_{s-1}Z^{(k)}.$$

Among them we choose an element $c_s$ whose first coordinate $c_{0s} \neq 0$ has the least possible positive value $\geqq 1$.

The rearrangement of the decomposition (30) into complexes has the final form:

(34) $$Z_0 = \bar{c}_1\bar{a}_1Z^{(k)} + \bar{c}_2\bar{a}_2Z^{(k)} + \cdots + \bar{c}_s\bar{a}_sZ^{(k)},\ c_1 = 1.$$

2. To prove our theorem it is sufficient to show that every element of the set

$$\bar{a}_1\bar{c}_1,\ \bar{a}_2\bar{c}_2, \ldots, \bar{a}_s\bar{c}_s,\ c_1 = 1,$$

can be written in the form

$$\bar{a}_1\bar{\xi}_1^k + \bar{a}_2\bar{\xi}_2^k + \cdots + \bar{a}_s\bar{\xi}_s^k.$$ [18])

We shall prove more. We shall show that every $\bar{a}_i\bar{c}_i$ $(1 \leqq i \leqq s)$ can be written already in the form

$$\bar{a}_i\bar{c}_i = \bar{a}_1\bar{\xi}_1^k + \cdots + \bar{a}_i\bar{\xi}_i^k, \quad \bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_i \in Z.$$

This follows by induction. The statement is true for $i=1$ since $\bar{a}_1\bar{c}_1 = \bar{a}_1 = \bar{a}_1 \cdot 1^k$. Suppose that our statement is true for all $\bar{a}_t\bar{c}_t$, $1 \leqq t < i$. We prove it for $\bar{a}_i\bar{c}_i$. Let the element

$$c_i = c_{0i} + c_{1i}\alpha + \cdots + c_{f-1,\,i}\alpha^{f-1}$$

[18]) Since every element $\in Z_0$ arises from one of the $\bar{a}_i\bar{c}_i$ $(1 \leqq i \leqq s)$ by multiplication by a suitable $k$-th power.

be of the length $l_i$. Let us construct the complex $\overline{(c_i-1)}\bar{a}_i Z^{(k)}$ and let us consider the number

$$c_i-1=(c_{0i}-1)+c_{1i}\alpha+\cdots+c_{f-1,i}\alpha^{f-1}.$$

If $c_{01}=1, c_i-1$ has a length less then $c_i$. If $c_{i0}\neq 1, c_i-1$ has the same length $l_i$ but its first coordinate is less than the first coordinate of the number $c_i$. In both cases (with respect to the definition of the number $c_i$) the complex $\overline{(c_i-1)}\bar{a}_i Z^{(k)}$ satisfies

$$\overline{(c_i-1)}\bar{a}_i Z^{(k)}\subset \bar{c}_1\bar{a}_1 Z^{(k)}+\cdots+\bar{c}_{i-1}\bar{a}_{i-1}Z^{(k)}.$$

This means: there exists an index $t\leqq i-1$ and such a number $\xi_0$ that $\overline{(c_i-1)}\bar{a}_i=\bar{c}_t\bar{a}_t\bar{\xi}_0^k$. By the inductive supposition we can write

$$\bar{c}_t\bar{a}_t=\bar{a}_1\bar{\xi}_1^k+\bar{a}_2\bar{\xi}_2^k+\cdots+\bar{a}_{i-1}\bar{\xi}_{i-1}^k.$$

with suitable elements $\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2,\ldots,\bar{\xi}_{i-1}$. Hence

$$\overline{(c_i-1)}\bar{a}_i=\bar{a}_1\overline{\xi_1\xi_0}^k+\bar{a}_2\overline{\xi_2\xi_0}^k+\cdots+\bar{a}_{i-1}\overline{\xi_{i-1}\xi_0}^k,$$

i. e.

$$\bar{c}_i\bar{a}_i=\bar{a}_1\cdot\overline{\xi_1\xi_0}^k+a_2\overline{\xi_2\xi_0}^k+\cdots+\bar{a}_{i-1}\overline{\xi_{i-1}\xi_0}^k+\bar{a}_i\cdot\bar{1}^k.$$

Theorem 3 is completely proved.

## IV.

Theorem 3 enables us to prove the following

Theorem 4. *Let $K$ be the derived field of an algebraic number field $R(\vartheta)$ complete under a discrete valuation corresponding to a prime ideal $\mathfrak{p}$ of $J[\vartheta]$. Let be further*

a) $N(\mathfrak{p})=p^f,\ f\geqq 1,\ p>2;$

b) $\mathfrak{p}\|p;$

c) $k>1,\ k=k_0p^t,\ (k_0,p)=1,\ t\geqq 0,\ (k,p^f-1)\leqq p-1;$

d) $s=\dfrac{p^{f(t+1)}-1}{p^f-1}(k,p^f-1),\ a_1,a_2,\ldots,a_{s+1}$ $s+1$ *integral elements* $\in K$ *satisfying* $a_1\cdot a_2\cdots a_{s+1}\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$.

*Then every number $b\in K$ can be written in the form*

$$b=a_1\xi_1^k+a_2\xi_1^k+\cdots+a_{s+1}\xi_{s+1}^k$$

*with suitable $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{s+1}\in K$.*

Proof. The proof will be — to a some extent — a repetition of the proof of Theorem 2.[19]) Without loss of generality suppose $b$ integral.

We write again

$$f(\mathbf{x}) = a_1 x_1^k + \cdots + a_s x_s^k - b$$

and use the notations from the proof of Theorem 2.

1. Suppose first $b \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. According to Theorem 3 there exists a primitive vector $\mathbf{v}_1 = [\xi_{11}, \xi_{21}, \ldots, \xi_{s1}]$ such that $f(\mathbf{v}_1) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$. Let be $f(\mathbf{v}_1) = f(\xi_{11}, \ldots, \xi_{s1}) = c \cdot \pi^m$, $m \geqq t+1$, $\pi^m \| f(\mathbf{v}_1)$, $c \in I$. Find a vector $[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s]$ the components of which satisfy the relation

$$c + \sum_{i=1}^{s} k_0 \left(\frac{p}{\pi}\right)^t a_i \xi_{i1}^{k-1} \eta_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.\text{[19a])} \tag{35}$$

This is possible since $c \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ and at least one of the summands is $\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Put $\xi_{i2} = \xi_{i1} + \eta_i \cdot \pi^{m-t}$ and consider the primitive vector $\mathbf{v}_2 = [\xi_{12}, \xi_{22}, \ldots, \xi_{s2}]$. We have

$$f(\mathbf{v}_2) = \sum_{i=1}^{s} a_i (\xi_{i1} + \eta_i \pi^{m-t})^k - b =$$

$$= f(\mathbf{v}_2) + \sum_{i=1}^{s} a_i k_0 p^t \xi_{i1}^{k-1} \eta_i \pi^{m-t} + \sum_{i=1}^{s} a_i \binom{k}{2} \xi_{i1}^{k-2} \eta_i^2 \pi^{2(m-t)} + \cdots = \tag{36}$$

$$= \pi^m \left[c + \sum_{i=1}^{s} a_i k_0 \left(\frac{p}{\pi}\right)^t \xi_{i1}^{k-1} \eta_i\right] + \sum_{i=1}^{s} a_i \xi_{i1}^{k-2} \eta_i^2 \binom{k}{2} \pi^{2(m-t)} + \cdots.$$

The first bracket on the right is divisible by $\mathfrak{p}$ in a power equal or greater than $m+1 \geqq t+2$. According to the Lemma 4b for $p \geqq 3, l \geqq 2, m-t \geqq 1$ the expression $\binom{k}{l} \pi^{l(m-t)}$ is divisible by $\mathfrak{p}^{t+2}$. Hence the second term (and the more each of the remainig terms) is divisible at least by $\mathfrak{p}^{t+2}$. Therefore for $p \geqq 3$ it holds certainly

$$f(\mathbf{v}_2) \equiv 0 \qquad \pmod{\mathfrak{p}^{t+2}}. \tag{37}$$

Let us remark further: if moreover $m-t > 1$ then (according to lemma 4c) for $p = 2$ $(l \geqq 2)$ the expression $\binom{k}{l} \pi^{l(m-t)}$ is divisible at least by

---

[19]) Theorem 2 is not merely a special case of Theorem 4. It should be noted explicitly that

*a*) Theorem 2 holds also in the case $\mathfrak{p}^i | p$, where $i > 1$.

*b*) Theorem 2 holds also for $\mathfrak{p} | 2$.

*c*) Theorem 2 holds also in the case *B*.

This is the true reason for which we have found it convenient to prove Theorem 2 separately.

[19a]) Note that since $\mathfrak{p} \| p$, $\mathfrak{p} \| \pi$ the quotient $\frac{p}{\pi}$ is a unit in $K$, hence $\frac{p}{\pi} \in I$.

$\mathfrak{p}^{t+m-t+1}=\mathfrak{p}^{m+1}$. Since $m+1\geqq t+2$ the relation (37) holds in this case even for $p=2$.

We repeat the process used to the construction of the vector $\mathbf{v}_2$.

Let be $f(\mathbf{v}_2)=c'\cdot\pi^{m'}$, $m'\geqq t+2$, $\pi^{m'}\|f(\mathbf{v}_2)$, $c\in I$. Find a vector $[\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_s]$ the components of which satisfy the congruence

$$c'+\sum_{i=1}^{s}k_0\left(\frac{p}{\pi}\right)^t a_i\xi_{i2}^{k-1}\zeta_i\doteqdot 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}).$$

Put $\xi_{i3}=\xi_{i2}+\zeta_i\pi^{m'-t}$ and consider the primitive vector $\mathbf{v}_3=[\xi_{13},\xi_{23},\ldots,\xi_{s3}]$. We have

$$f(\mathbf{v}_3)=\sum_{i=1}^{s}a_i(\xi_{i2}+\zeta_i\pi^{m'-t})^k-b=$$

$$=f(\mathbf{v}_2)+\sum_{i=1}^{s}a_ik_0p^t\xi_{i2}^{k-1}\zeta_i\pi^{m'-t}+\sum_{i=1}^{s}a_i\binom{k}{2}\xi_{i2}^{k-2}\zeta_i^2\pi^{2(m'-t)}+\cdots=$$

$$=\pi^{m'}\left[c'+\sum_{i=1}^{s}a_ik_0\left(\frac{p}{\pi}\right)^t\xi_{i2}^{k-1}\zeta_i\right]+\sum_{i=1}^{s}a_i\xi_{i2}^{k-2}\xi_i^2\binom{k}{2}\pi^{2(m'-t)}+\cdots.$$

The first bracket on the right is divisible by $\mathfrak{p}$ in a power at least equal to $m'+1\geqq t+3$. Since $m'-t\geqq 2$ we see (according to Lemma 4c) that for $p\geqq 2$, $l\geqq 2$ the expression $\binom{k}{2}\pi^{2(m'-t)}$ is divisible by $\mathfrak{p}$ in a power at least equal to $t+(m'-t)+1=m'+1\geqq t+3$. Hence

$$f(\mathbf{v}_3)\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^{t+3}).$$

Repeating this process we get a sequence of primitive vectors $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\ldots$ satisfying $f(\mathbf{v}_i)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^{t+i})$.

Since the set of integers $\in I$ which are $\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p})$ is compact we can choose a subsequence which converges coordinatewise to a primitive vector $\mathbf{v}$. With respect to the continuity of the function $f(\mathbf{x})$ this vector satisfies $f(\mathbf{v})=0$.

This proves Theorem 4 in the case $b\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p})$ with the supplementary result that we can choose $\xi_{s+1}=0$.

2) Suppose $b\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p})$. There would be possible to use the above argument if there existed a primitive vector $[\xi_{11},\xi_{21},\ldots,\xi_{s1}]$ satisfying

$$0\equiv a_1\xi_{11}^k+\cdots+a_s\xi_{s1}^k. \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^{t+1}). \tag{38}$$

We have seen in the remark to Theorem 2 that — in general — this is not the case.

Consider therefore the element $c=b-a_{s+1}$. Then $c\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p})$. According to the proof sub 1 there exist $s$ numbers $\xi_1,\ldots,\xi_s\in K$ with

$$b-a_{s+1}=a_1\xi_1^k+\cdots+a_s\xi_s^k.$$

Hence

$$b = a_1\xi_1^k + \cdots + a_s\xi_s^k + a_{s+1}\cdot 1^k.$$

Theorem 4 is completely proved.

It follows from the proof just given:

Theorem 4a. *Let the suppositions of Theorem 4 be satisfied with the modification that there are given only s integral elements* $a_1, \ldots, a_s \in K$ *with* $a_1 a_2 \ldots a_s \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. *Then, if* (38) *has at least one non-zero solution, then every element* $b \in K$ *can be written already in the form* $b = a_1\xi_1^k + \cdots + a_s\xi_s^k$, $\xi_i \in K$.

Remark 1. Theorem 4 has been proved under the supposition $\mathfrak{p} \| p$. We show on a simple example that this supposition cannot be omitted. Let $K = R(\sqrt{-5})_{\mathfrak{p}}$, where $\mathfrak{p} = [\sqrt{-5}]$, i. e. $[p] = [5] = \mathfrak{p}^2$, $N(\mathfrak{p}) = 5$, $f = 1$. Choose $a_1 = \cdots = a_s = 1$ and $k = 5$. There exist numbers $b \in R(\sqrt{5})$ for which

$$(39) \qquad b \equiv \xi_1^5 + \cdots + \xi_s^5 \pmod{\mathfrak{p}^2}$$

has no solution with integral $\xi_1, \ldots, \xi_s$ for any $s \geqq 1$. Such a number is for instance $b = \sqrt{-5}$. The complete set of representantes of the classes (mod $[\sqrt{-5}]$) is $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Representantes of the residue-classes (mod $\mathfrak{p}^2$) are the numbers $c_0 + c_1\sqrt{-5}$ ($c_0, c_1 = 0, \ldots, 4$). The elements of the set $Z^{(5)}$ are $Z^{(5)} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ (fifth power residues (mod $\mathfrak{p}^2$)). If (39) were solvable for $b = \sqrt{-5}$ it would be possible to write $\sqrt{-5} \equiv \sum_{i=1}^{s} d_i \pmod{[5]}$, $0 \leqq d_i < 5$, i. e. $\sqrt{-5} - d \equiv 0 \pmod{[5]}$, where $0 \leqq d < 5$. This is impossible since $\dfrac{\sqrt{-5} - d}{5}$ is not an algebraic integer $\in R\sqrt{-5})$.

Let us look for where the proof of Theorem 4 fails in the case $\mathfrak{p}^i | p$, $i \geqq 2$. Lemma 13 does not hold.[20]) But it can be proved (see for instance O. *Ore* [8], p. 58) that it is always possible to find a number $\gamma$ satisfying (11) so that every residue $\omega$ (mod $\mathfrak{p}^a$) (for $a \geqq e$ where $\mathfrak{p}^e \| p$) can be written in the form $\omega = D(\gamma)$, where $D(\gamma)$ is a polynomial in $\gamma$ with rational integral coefficients. (Briefly: $\pi$ can be eliminated from Lemma 3.)[21]) Hence there would be possible to introduce the notions of the length and coordinates. But this $\gamma$ (and this is essential!) cannot be written — in general — in the form $\gamma \equiv \beta^k \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$. Therefore we cannot say that every complex $\bar{n} Z^{(k)}$ con-

[20]) F. i. in our example it is not true that every residue $\omega$ (mod $\mathfrak{p}^2$) is of the form $\omega \equiv d_0 \pmod{\mathfrak{p}^2}$ where $d_0 = 0, 1, \ldots, 24$. (Only 5 of these residues are different.)

[21]) In our example it is sufficient to choose $\gamma = \sqrt{-5}$. Then the complete system of residues (mod $\mathfrak{p}^2$) can be written in the form $c_0 + c_1\gamma$ ($c_0, c_1 = 0, 1, \ldots, 4$).

tains an element $c_0+c_1\alpha+c_2\alpha^2+\cdots$ with $c_0 \neq 0$, i. e. Lemma 14 does not hold.[22]) The induction used in the proof of Theorem 3 cannot be applied.

R e m a r k 2. Theorem 4 was proved under the supposition $p>2$. Consider now a prime ideal $\mathfrak{p}$ with $N(\mathfrak{p})=2^f, f\geqq 1$. Theorem 3 holds but is not sufficient to the proof of a theorem analogous to Theorem 4.

For, if $\mathfrak{p}|2$ we have $\mathfrak{p}^{t+1} \Big\| \dfrac{k(k-1)}{2}\pi^2$ so that for $m-t=1$ the equation (36) implies instead of (37) only

$$f(\mathbf{v}_2)\equiv\sum_{i=1}^{s} a_i \xi_{i1}^{k-2}\eta_i^2\binom{k}{2}\pi^2 \qquad (\operatorname{mod} \mathfrak{p}^{t+2})$$

and the right hand side is — in general — $\not\equiv 0 \ (\operatorname{mod} \mathfrak{p}^{t+2})$.

This can really take place as an example in the rational 2-adic field shows. Choose $f(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2+x_3^2-7$. Here $\mathfrak{p}=p=2, k=2$, i. e. $t=1, s=3$. The vector $\mathbf{v}_1=[1, 1, 1]$ satisfies (in accordance with Theorem 3) $f(\mathbf{v}_1)\equiv 0$ $(\operatorname{mod} \mathfrak{p}^{t+1}=2^2)$. We have $f(\mathbf{v}_1)=-1\cdot 2^2$. The equation (35) is of the form

$$-1+\eta_1+\eta_2+\eta_3\equiv 0 \qquad (\operatorname{mod}\ 2). \tag{40}$$

This equation is soluble. But constructing the vector

$$\mathbf{v}_2=[1+2\eta_1, 1+2\eta_2, 1+2\eta_3]$$

we get

$$f(\mathbf{v}_2)=4(-1+\eta_1+\eta_2+\eta_3)+4(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2),$$

i. e. $f(\mathbf{v}_2)\equiv 4(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2) \ (\operatorname{mod} 2^3)$ and for $\eta_i$ satisfying (40) we have clearly $\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2\equiv 1 \not\equiv 0 \ (\operatorname{mod}\ 2)$, whence $f(\mathbf{v}_2)\not\equiv 0 \ (\operatorname{mod}\ 2^3)$.[23])

This shows that Theorem 4 cannot hold in general for $p=2$, at least not in the case if the number $s$ keeps the meaning introduced above.

But one proves immediately the validity of the following assertion.

*If for some $s$ and $a_1a_2\ldots a_s\not\equiv 0 \ (\operatorname{mod}\mathfrak{p})$ the congruence*

$$b\equiv a_1\xi_{10}^k+\cdots+a_s\xi_{s_0}^k \qquad (\operatorname{mod} \mathfrak{p}^{t+2})$$

*has a non-zero solution $(\xi_{10},\ldots,\xi_{s_0})$, then*

$$b=a_1\xi_1^k+\cdots+a_s\xi_s^k$$

*is soluble in $K$ even in the case $\mathfrak{p}|2$.*

---

[22]) In the case $R(\sqrt{-5})$, $\mathfrak{p}=[\sqrt{-5}]$, $k=5$ there exist seven complexes: $\{0\}$, $Z^{(5)}=\{1,2,3,4\}$, $\{1+\sqrt{-5}, 2+2\sqrt{-5}, 3+3\sqrt{-5}, 4+4\sqrt{-5}\}$, $\{1+2\sqrt{-5}, 2+4\sqrt{-5}, 3+\sqrt{-5}, 4+3\sqrt{-5}\}$, $\{2+\sqrt{-5}, 4+2\sqrt{-5}, 1+3\sqrt{-5}, 3+4\sqrt{-5}\}$, $\{1+4\sqrt{-5}, 2+3\sqrt{-5}, 3+2\sqrt{-5}, 4+\sqrt{5}\}$, $\{\sqrt{-5}, 2\sqrt{-5}, 3\sqrt{-5}, 4\sqrt{-5}\}$.

In the last complex there does not exist an element with the first coordinate $\neq 0$.

[23]) It is clear, of course, in advance that $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\equiv 7 \ (\operatorname{mod} 8)$ is not soluble with integral $\xi_1, \xi_2, \xi_3$.

The proof follows from the fact that for $\varrho > 1$ Lemma 4 $c$) holds also in the case $p = 2$. In the step from the congruence $(\bmod\, \mathfrak{p}^{t+2})$ to the congruence $(\bmod\, \mathfrak{p}^{t+3})$ we get always (i. e. also for $\mathfrak{p}|2$) a linear congruence which is soluble.

## Bibliography.


[1] R. Brauer, A note on systems of homogeneous algebraic equations, *Bulletin Amer. Math. Soc.*, **51** (1945), 749—755.

[2] C. Chevalley, Démonstration d'une hypothèse de M. Artin, *Abhandlungen Math. Sem. d. Hansischen Univ.*, **11** (1935), 73—75.

[3] V. B. Demyanov, On cubic forms in discretely normed fields (russian), *Doklady Akad. Nauk. SSSR*, **74** (1950), 889—891.

[4] H. Hasse, Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlenkörper, *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **153** (1924), 113—130.

[5] B. W. Jones, *The Arithmetic Theory of Quadratic Forms.* (Baltimore, 1950).

[6] E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, I. Bd. (Leipzig, 1927).

[7] D. J. Lewis, Cubic homogeneous polynomials over $\mathfrak{p}$-adic number fields, *Annals of Math.*, **56** (1952), 473—478.

[8] O. Ore, Les corps algébriques et la théorie des ideaux, *Mémorial des sciences mathématiques*, LXIV (Paris, 1934).

[9] Št. Schwarz, On Waring's problem for finite fields, *Quarterly Journal of Math.* (Oxford), **19** (1948), 123—128.

[10] Št. Schwarz, On universal forms in finite fields, *Časopis pěst. mat. fys.*, **75** (1950), 45—50.

[11] I. M. Vinogradov, *Collected papers* (russian) (Moscow, 1952).


(*Received June 8, 1955.*)

# On Artinian rings.

By T. SZELE † in Debrecen and L. FUCHS in Budapest[1].

## § 1. Introduction.

By an Artinian ring we mean a ring ($\neq 0$) whose left ideals satisfy the minimum condition. Two important classes of Artinian rings have a satisfactory description: 1. those without nonzero nilpotent left ideals (i. e. the semisimple rings) which are — in view of the classical Wedderburn—Artin structure theorems — characterized by a finite set of skew fields and natural integers, 2. the nilpotent Artinian rings whose structure is reduced to the finite nilpotent rings [6].[2] Here we give a characterization of a third class of Artinian rings containing all the semisimple rings, namely, the class of those rings which are *completely reducible from the left* in the sense that they are direct sums of a finite number of minimal left ideals. The structure of these rings may be described again by a finite number of skew fields and natural integers (Theorem 1).

Turning our attention to general Artinian rings, we first consider the additive structure of Artinian rings. Since this problem has been discussed in full details in [3], here we only mention the principal result according to which the additive group $A^+$ of an Artinian ring $A$ has a direct decomposition into rational groups $\mathfrak{R}$, a finite number of groups $\mathfrak{C}(p^\infty)$, and cyclic groups of bounded order.[3]

Our next considerations are concerned with Artinian rings containing no subgroup of type $p^\infty$. We shall show that such rings have an important ring-theoretic direct decomposition, namely into the direct sum of a torsion

---

[1]) All the problems discussed in this paper were stated by T. Szele to whom are due Theorems 1—4 and the necessity parts of Theorems 5—6. After his death his notes on Artinian rings were obtained by the second-named author who made this paper ready for publication.

[2]) Numbers in brackets refer to the Bibliography given at the end of this paper.

[3]) By a rational group we mean a group $\mathfrak{R}$ isomorphic to the additive group of all rational numbers. $\mathfrak{C}(p^\infty)$ will denote Prüfer's group of type $p^\infty$ and $\mathfrak{C}(n)$ the cyclic group of order $n$.

free Artinian ring and a finite number of Artinian $p$-rings. Thus the theory of Artinian rings without subgroups of type $p^\infty$ may be reduced to that of Artinian torsion free and $p$-rings. Moreover, it will turn out that these rings form a very important class of Artinian rings. In fact, this assertion is justified in view of the following two results: 1. an Artinian ring can be imbedded in an Artinian ring with unity element if and only if it contains no subgroup of type $p^\infty$; 2. the left ideals of an Artinian ring $A$ satisfy also the maximum condition if and only if no subgroup of type $p^\infty$ is contained in $A$. This second statement is an improvement of CH. HOPKINS' well-known result [4] stating that in an Artinian ring with a left or a right unity element the left ideals satisfy the maximum condition too.[4]) The mentioned results also show that the ring structure may depend to a great extent on the additive structure.

Our final result gives a necessary and sufficient condition for the radical of an Artinian ring to be again an Artinian ring.

Some observations concerning terminology may be inserted here. We call a ring $R$ torsion free, torsion or $p$-ring according as its additive group $R^+$ is a torsion free, a torsion or a $p$-group. The elements of the torsion subgroup of $R^+$ as well as the elements of the maximal algebraically closed[5]) subgroup of $R^+$ form an ideal of $R$. If $L$ is a left ideal of $R$, the elements of the form $nx$ with $x \in L$ and $n$ a fixed natural integer form again a left ideal of $R$, denoted by $nL$. The signs $+$ and $\dot{+}$ will be used to denote direct sums in the group-theoretic resp. in the ring-theoretic sense.

## § 2. Rings which are completely reducible from the left.

By a ring in the title we shall understand a ring $R$ which may be decomposed into the direct sum of a finite number of minimal left ideals. Clearly, if

---

[4]) It follows readily that the presence of a onesided unity element excludes the existence of a subgroup of type $p^\infty$ in Artinian rings. — Let us remark at this stage that AKIZUKI has proved a similar result: *if a commutative ring $R$ with the weakened minimum condition contains at least one element which is no divisor of zero, then in $R$ also the maximum condition holds* [1]. This will also follow from Theorem 6 (moreover, even for the non-commutative case), if one takes into account (see Satz 10 in [3]) that a ring with weakened minimum condition for left ideals and with not torsion free additive group has the same additive structure as the Artinian rings (see Theorem 2), and hence the absence of divisors of zero implies the failure of subgroups of type $p^\infty$ (cf. Corollary 4 in § 5).

[5]) By an algebraically closed group $G$ (for this terminology see [5]) is meant an abelian group with $nG = G$ for all natural integers $n$. Such groups are direct sums of rational groups and/or groups of type $p^\infty$, and are, by a well-known result of BAER [2], direct summands of every containing abelian group.

$R$ is assumed to have no nonzero nilpotent left ideals or to contain a unit element, then the notions „completely reducible from the left" and „semisimple" coincide. Our aim is to get a structure theorem for the rings in the title.

In this §, let $R$ denote a ring completely reducible from the left and $L$ a minimal left ideal[6]) of $R$. Since $RL \subseteq L$, we have either $RL = 0$ or $RL = L$. It is further known that a minimal left ideal is either nilpotent or idempotent (and in the latter case it may be generated by an idempotent element).[7]) Hence

$$R = A_1 + \cdots + A_r + B_1 + \cdots + B_s + C_1 + \cdots + C_t \tag{1}$$

where the minimal left ideals $A_i, B_j, C_k$ satisfy: $RA_i = 0$; $RB_j = B_j$, $B_j^2 = 0$; $RC_k = C_k$, $C_k^2 = C_k$. Evidently, for the radical[8]) $N$ of $R$ we have

$$N = A_1 + \cdots + A_r + B_1 + \cdots + B_s$$

(for $N$ contains all nilpotent left ideals $A_i$ and $B_j$, but can contain no element of $C_1 + \cdots + C_t$), while

$$A = A_1 + \cdots + A_r$$

is the right annihilator ideal[9]) of $R$.

Let us now consider the structures of $A_i, B_j, C_k$.

$C = C_1 + \cdots + C_t$ is a left ideal of $R$ and is — as a ring — clearly semisimple. Thus the structure of $C$ is completely known in view of the Wedderburn—Artin structure theorems.

From $RA_i = 0$ it follows that each subgroup of $A_i$ is at the same time a left ideal of $R$, and thus, by the minimality of $A_i$, we conclude that the additive group of $A_i$ is $\mathfrak{C}(p)$ for some prime $p$.[10])

Next we intend to prove that $A$ is also a left annihilator of $R$. It is plainly sufficient to show that for each $i, j, k$ we have $A_i B_j = 0$ and $A_i C_k = 0$. For this purpose we establish the equality $A_i L = 0$ for each minimal left ideal $L$ of $R$ with $RL = L$. Indeed, $A_i L = L$ would imply $L = RL = R(A_i L) = (RA_i) L = 0 \cdot L = 0$. — The left annihilator ideal of $R$ in general properly contains $A$; namely, it coincides with the radical $N$ of $R$. To see this, we verify that $B_j B_{j'} = 0$ and $B_j C_k = 0$ for all $j, j', k$. In the contrary case $B_j L = L$ we should have $L = B_j L = B_j (B_j L) = B_j^2 \cdot L = 0 \cdot L = 0$. On the

---

[6]) A minimal left ideal $L$ is different from 0 and contains no left ideal $\neq 0$ properly.

[7]) See e. g. VAN DER WAERDEN [8], p. 145.

[8]) The notion of radical may be taken in any sense usual in the literature, because all usual definitions coincide under the assumption of the minimum condition. However, for the sake of definiteness, here let the radical be defined as the union of all nilpotent left ideals of the ring.

[9]) I. e. the set of all $y \in R$ with $Ry = 0$.

[10]) Every $A_i$ is a zeroring, i. e. any two elements annihilate each other.

other hand, since $R/N$ is semisimple, the left annihilator of $R$ can not be greater than $N$, q. e. d. Thus $NR=0$ and $N^2=0$.

Consider the product $CB_j$. We have $CB_j=NB_j+CB_j=RB_j=B_j$, and hence $B_j$ is a minimal $C$-module, $C$ a semisimple ring. But then $B_j$ is $C$-isomorphic to some minimal left ideal $C_k$ of $C$. Hence $B_j$ is a zeroring whose additive group is isomorphic to some $C_k$.

We have thus proved:

Theorem 1. *A ring $R$ completely reducible from the left has the following structure:*

$$R=(A_1+\cdots+A_r)+(B_1+\cdots+B_s)+(C_1+\cdots+C_t)=A+B+C$$

*where the minimal left ideals $A_i, B_j, C_k$ satisfy:*

(i) $RA_i=A_iR=0$; *the $A_i$ are zerorings with an additive group $\mathfrak{C}(p)$;*

(ii) $AB_j=BB_j=B_jR=0, CB_j=B_j$; *each $B_j$ is a zeroring whose additive group is $C$-isomorphic to some $C_k$;*

(iii) $AC_k=BC_k=C_kA=0, CC_k=C_k$; *$C$ is a semisimple ring.*

Since a semisimple ring $C$ may be characterized by a finite number of skew fields and natural integers, the same holds for $B$ too, consequently, we obtain

Corollary 1. *Any ring completely reducible from the left may be characterized by a finite set of skew fields and natural numbers.*

Let us observe that the left complete reducibility of a ring does not necessarily imply the same for the right. In fact, if $R$ is completely reducible from both sides, then its radical $N$ is the twosided annihilator ideal of $R$, and therefore in case $s \geqq 1$, i. e. if the set of the $B_j$ is not void, $R$ can not be completely reducible from the right. Moreover, it may happen that the right ideals of $R$ do not satisfy the minimum condition.

As a simple consequence of our result we mention:

Corollary 2. *A ring completely reducible from the left is semisimple if and only if it contains no nonzero left annihilator.*

## § 3. Decompositions of Artinian rings.

Let $A$ be an Artinian ring. The additive structure of $A$ is completely described by

Theorem 2. *The additive group $A^+$ of an Artinian ring $A$ is of the form*

(2) $$A^+=\sum \mathfrak{R}+\sum \mathfrak{C}(p^\infty)+\sum_{p^k|m} \mathfrak{C}(p^k) \qquad (m \text{ fixed})$$

*where the cardinal number of the components in the first and third summand is arbitrary, while that in the second summand is finite.*

For the proof of this theorem we refer to [3] where it is also shown that to any given group $A^+$ of the form (2) there exists an Artinian ring $A$ whose additive group is $A^+$.

Let us here observe that the aditive group $R^+$ of a ring $R$ completely reducible from the left has the form

$$R^+ = \sum \mathfrak{R} + \sum \mathfrak{C}(p_1) + \cdots + \sum \mathfrak{C}(p_n) \qquad (p_i \textit{ fixed})$$

where the cardinal number of the components in each direct summand is arbitrary. In fact, this follows at once from the structure theorem (Theorem 1), if we take into account that any complete matrix ring over a skew field has the additive structure $\sum \mathfrak{R}$ or $\sum \mathfrak{C}(p)$ according as the characteristic of the skew field is 0 or $p$.

While Theorem 2 establishes a direct decomposition in the group-theoretic sense, the next result shows that in the important case of the absence of subgroups of type $p^\infty$ the Artinian rings admit a direct decomposition in the ring-theoretic sense.

Theorem 3. *An Artinian ring $A$ without subgroups of type $p^\infty$ is the ring-theoretic direct sum of a torsion free Artinian ring $B$ and a finite number of Artinian $p$-rings $C_i$, belonging to different primes $p_i$,*

$$A = B \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_r. \tag{3}$$

*The components $B, C_1, \cdots, C_r$ are uniquely determined by $A$.*

If the Artinian ring $A$ contains no subgroup of type $p^\infty$, then its maximal algebraically closed ideal $B$ and its torsion subideal $C$ have no nonzero element in common. Since, by Theorem 2, $B$ and $C$ together generate $A$, we have $A = B \oplus C$. If we decompose $C$ into its $p$-components, we arrive at (3). Evidently, the ideals $B$ and $C_i$ are Artinian rings and are uniquely determined as the maximal algebraically closed ideal resp. the maximal $p$-subrings of $A$.

Theorem 3 reduces the theory of Artinian rings with no subgroup of type $p^\infty$ to the theory of torsion free Artinian rings and to that of Artinian $p$-rings whose elements are of bounded order.[11])

---

[11]) We have not succeeded in deciding whether or not Theorem 3 holds in general. In case subgroups of type $p^\infty$ are present, the difficulty arises from the possibility that the product of two elements of $B$ ($B$ is now defined as the torsion free component of the algebraically closed subideal $D$) belongs to $D$, but not necessarily to $B$. It is not hard to see that (3) is not true in general for every choice of $B$, but it is an open question whether $B$ can always be chosen appropriately so as to satisfy (3).

## § 4. Artinian rings with unity element.

Let the Artinian ring $A$ contain a (left, right or twosided) unity element. Then $A$ contains no subgroup $\mathfrak{C}(p^\infty)$. Indeed, assume $a$ is an element of order $p$ and of infinite height[12]) in $A$. For a left[13]) unity element $e$ of $A$ there exists no $x \in A$ with $p^{n+1}x = p^n e$ where $n$ is any non-negative integer, since in the contrary case we should have

$$a = ea = e(p^n y) = (p^n e) y = (p^{n+1} x) y = x(p^{n+1} y) = x(pa) = x \cdot 0 = 0,$$

a contradiction. Therefore $p^n e$ does not belong to $p^{n+1}A$, i. e. $p^{n+1}A$ is a proper subideal in $p^n A$. Thus

$$A \supset pA \supset \cdots \supset p^n A \supset p^{n+1} A \supset \cdots$$

is an infinite descending chain of ideals of $A$, contradicting the minimal condition for left ideals. Hence, by Theorem 3, we get

Theorem 4. *An Artinian ring $A$ with a left, right or twosided unity element contains no subgroup of type $p^\infty$ and is the (ring-theoretic) direct sum of a torsion-free Artinian ring and a finite number of Artinian $p$-rings, all with the same sided unity element.*

It is known that every ring may be imbedded in a ring with unity element. If we perform the usual construction of imbedding for an Artinian ring, we do not get, in general, an Artinian ring again. Hence the problem arises: under what conditions may an Artinian ring be imbedded in an Artinian ring with unity element?[14]) This question is completely answered by

Theorem 5. *An Artinian ring $A$ can be imbedded in an Artinian ring $R$ with unity element if and only if $A$ contains no subgroup of type $p^\infty$.*

That the failure of subgroups $\mathfrak{C}(p^\infty)$ is a necessary condition follows immediately from Theorem 4. Now suppose, conversely, that the Artinian ring $A$ contains no subgroup of type $p^\infty$. Then we have (3) and it is clearly sufficient to show that all of $B$ and $C_i$ may be imbedded in Artinian rings with unity elements.

First let us consider the torsion free Artinian ring $B$. We define an overring $U$ of $B$ as follows: $U^+ = B^+ + \mathfrak{R}$ and define the multiplication for

---

[12]) I. e. the equation $p^n y = a$ is solvable for some $y$, for each natural integer $n$.

[13]) The same inference can be applied if $e$ is a right unity element.

[14]) A problem of the kind „a ring of property P is to be imbedded in a ring with unity element and again of property P" has been discussed by J. SZENDREI [7]; he has proved that every ring without divisors of zero can be imbedded in a ring with unity element and without divisors of zero.

the elements $(a,\varrho)$ of $U^+$ by

(4) $$(a,\varrho)\cdot(b,\sigma)=(ab+\varrho b+\sigma a,\varrho\sigma) \qquad (a,b\in B;\varrho,\sigma\in\mathfrak{R})$$

where $\varrho b$ (the product of an element $B$ by a rational number) is, owing to the torsion free character of $B$, a uniquely determined element of $B$ (by Theorem 2, $B^+$ is algebraically closed!). It follows by an easy calculation that $U$ is a ring with the unity element $(0,1)$. In order to show that $U$ is an Artinian ring, let $L_1\supseteq L_2\supseteq\cdots$ be a descending chain of left ideals $L_n$ of $U$. Put $K_n=L_n\cap B$; then $K_1\supseteq K_2\supseteq\cdots$ is a descending chain of left ideals of $B$, hence it contains but a finite number of different left ideals. We have thus to prove that there is no infinite properly descending chain $L_1\supset L_2\supset\cdots$ of left ideals of $U$ such that $L_1\cap B=L_2\cap B=\cdots=K$.

The left ideal $K=L_n\cap B$ of $B$ consists of all $(a,\varrho)\in L_n$ with $\varrho=0$. If $(a,\varrho),(b,\sigma)\in L_n$ and $\varrho\neq 0$, then

$$(b,\sigma)-\left(0,\frac{\sigma}{\varrho}\right)(a,\varrho)=\left(b-\frac{\sigma}{\varrho}a,0\right)\in K,$$

whence we conclude that each element of $L_n$ lies in the subgroup $K^+ + P$ where $P$ denotes the rational subgroup of $U^+$ containing $(a,\varrho)$. We have

$$K^+\subseteq L_n^+\subseteq K^+ + P.$$

But any left ideal of an algebraically closed ring $U$ with unity element is again algebraically closed,[15]) hence either $L_n=K$ or $L_n=K+P$. This implies that in the descending chain in question at most two different ideals may exist (whose meets with $B$ coincide). Therefore, $U$ is an Artinian ring.

Now we proceed to the case of an Artinian $p$-ring $C$ whose elements are of bounded order, say, with the bound $p^k$. We construct a ring $V$ with the additive group $V^+=C^+ + M^+$ where $M$ is the ring of the residue classes of the rational integers modulo $p^k$. Let the multiplication of the elements $(a,\varrho)$ $(a\in V,\varrho\in M)$ be defined by the rule (4). As before it follows that the only thing we must verify is that there exists no infinite properly descending chain $L_1\supset L_2\supset\ldots$ of left ideals $L_n$ of $V$ such that $L_n\cap C$ is the same left ideal $K$ of $C$. Let $\varrho$ be the least natural integer with $(a,\varrho)\in L_n$. Then for any $(b,\sigma)\in L_n$ there is a $\tau\in M$ with $\sigma=\tau\varrho$. Now

$$(b,\sigma)-(0,\tau)(a,\varrho)=(b-\tau a,0)\in K$$

implies that $L_n^+/K^+$ is isomorphic to some subgroup of $\mathfrak{C}(p^k)$. Consequently, the chain $L_1\supset L_2\supset\ldots$ in question may contain at most $k+1$ different terms, i. e., $V$ is an Artinian ring.

[15]) For, together with each element $a$, all of its rational multiples $\varrho e a$ belong to the same left ideal.

This completes the proof of Theorem 5.

A simple consequence of our last result is

Corollary 3. *A nilpotent Artinian ring $A$ may be imbedded in an Artinian ring with unity element if and only if $A$ is finite.*

In fact, by [6], the additive group of a nilpotent Artinian ring is the direct sum of a finite number of groups $\mathfrak{C}(p^k)$ with $1 \leqq k \leqq \infty$. Now, Theorem 5 implies the assertion.

Finally, let us mention the following interesting problem: *characterize all rings which may be imbedded in an Artinian ring*. Evidently, a necessary condition is that the additive group of the ring is a subgroup of (2), i. e. the direct sum of a torsion free group, a finite number of groups of type $p^\infty$ and a torsion group with elements of bounded order. But this condition is not sufficient. The question of finding a necessary and sufficient condition is open.

## § 5. Artinian rings with the maximum condition for left ideals.

Next we turn our attention to the problem of finding a necessary and sufficient condition that the minimum condition for left ideals imply the maximum condition for the same ideals. Our result is contained in

Theorem 6. *The left ideals of an Artinian ring $A$ satisfy the maximum condition if and only if $A$ contains no subgroup of type $p^\infty$.*

The necessity of the condition follows immediately from the observation that in an Artinian ring $A$ each subgroup of a group of type $p^\infty$ is an ideal. In fact, $a \in \mathfrak{C}(p^\infty)$ is annihilated by each element $b \in \sum \mathfrak{R} + \sum \mathfrak{C}(q^\infty) + \sum_{q \neq p} \mathfrak{C}(q^k)$ in (2), for $ba = (p^n x) a = x(p^n a) = 0$ if[16] $O(a) = p^n$ and $x \in A$ satisfies $p^n x = b$, while for $c \in \sum \mathfrak{C}(p^k)$ we have $ca = c(p^s y) = (p^s c) y = 0$ if $O(c) = p^s$ and $y \in A$ is chosen so as to satisfy $p^s y = a$. Hence the elements of $\mathfrak{C}(p^\infty)$ annihilate the whole ring and therefore each subgroup of $\mathfrak{C}(p^\infty)$ is actually an ideal. Since the subgroups of $\mathfrak{C}(p^\infty)$ do not satisfy the maximum condition, the necessity of the condition in the theorem is established.

In order to prove the sufficiency, let us assume that $A$ is an Artinian ring with no subgroup of type $p^\infty$. Then, by Theorem 3, we have $A = B \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_r$ where $B$ is a torsion free Artinian ring and $C_i$ are Artinian $p$-rings with elements of bounded order. It is plainly enough

[16]) $O(x)$ denotes the order of the group element $x$.

to verify that in each of $B$ and $C_i$ the left ideals satisfy the maximum condition.

First consider the ring $B$. We imbed $B$ as shown in § 4 in an Artinian ring $U$ with unity element. Any left ideal $L$ of $B$ is algebraically closed. For, denoting by $mL$ a minimal one among the left ideals $nL$ $(n=1,2,\ldots)$ of $B$, from the algebraic closure of $mL$ it follows $L=mL+K$ for some $K\subseteq L$. But hence in view of $mL=m(mL+K)=mL+mK$ we get $mK=0$, i.e. $K=0$. Therefore, for any rational number $\varrho$ we have $\varrho L=L$. Using this fact, we may show that $L$ is a left ideal of $U$ too. Indeed, $(a,0)\in L$ and $(b,\varrho)\in U$ imply

$$(b,\varrho)(a,0)=(ba+\varrho a,0)=(ba,0)+\varrho(a,0)\in L,$$

considering that $(ba,0)\in L$ and $\varrho(a,0)\in L$. By HOPKINS' result [4], the left ideals of $U$ satisfy the maximum condition, consequently, the same is true for $B$.

The case of Artinian $p$-rings $C_i$ is somewhat easier. Constructing the ring $V$ of § 4, we see that, for any left ideal $L$ of $C$, $(a,0)\in L$ and $(b,\varrho)\in V$ ($\varrho$ belongs to the residue class ring of the integers mod $p^k$) imply $(b,\varrho)(a,0)=$ $=(ba+\varrho a,0)\in L$, i. e. $L$ is a left ideal also of $V$. A simple application of HOPKINS' result to $V$ completes the proof.

Obviously HOPKINS' theorem is a special case of Theorem 6, since by Theorem 4 an Artinian ring with onesided unity element can not contain any subgroup of type $p^\infty$.

On account of the fact that in an Artinian ring any element contained in a group of type $p^\infty$ is necessarily a twosided annihilator of the ring, we find

Corollary 4. *If an Artinian ring contains no annihilator, then for its left ideals the maximum condition holds.*

Considering a ring $R$ as an additive group with the left operator domain $R$, it is known that a composition series exists if and only if the left ideals satisfy both the minimum and the maximum condition. From Theorem 6 we conclude:

Theorem 7. *The left ideals of a ring have a composition series if and only if it is an Artinian ring containing no subgroup of type $p^\infty$.*

As the left ideals of a ring form a modular lattice and therefore the Jordan—Hölder theorem holds, it follows that for each Artinian ring $A$ without subgroups of type $p^\infty$ — and only for these rings — there exist a unique natural integer $l$, the length of $A$, and $l$ simple $A$-modules such that all maximal chains of left ideals have the same length $l$;

$$A=L_0\supset L_1\supset\cdots\supset L_l=0,$$

and the factor groups $L_{i-1}/L_i$ ($i=1,\dots,l$) are, up to order, isomorphic to the simple $A$-modules in question. It is easy to see that the additive structure of any simple $A$-module $G$ is either $\sum \mathfrak{R}$ or $\sum \mathfrak{C}(p)$ ($p$ a fixed prime), since $pG$ being an $A$-submodule of $G$, either it coincides with $G$ or reduces to 0; in the torsion case the first alternative can not occur, for a simple $A$-module[17] can not contain any subgroup of type $p^\infty$. From this simple remark we may at once obtain a lower bound for $l$ in terms of the additive structure of $A$. In (3) let $C_i$ be a $p_i$-ring for which the least upper bound of the orders of its elements is $p_i^{k_i}$. Then a composition series for the left ideals of $C_i$ is of length $\geqq k_i$, considering that $C_i \supset p_i C_i \supset \cdots \supset p_i^{k_i} C_i = 0$ is a properly descending chain of left ideals. Consequently, the length $l$ of $A$ satisfies the inequality

$$l \geqq k_1 + \cdots + k_r \text{ or } l \geqq 1 + k_1 + \cdots + k_r$$

according as $A$ is a torsion ring or not. Of course, the same inequality must hold for the length $l'$ of a composition series of right ideals, if it exists.

## § 6. The radical of an Artinian ring.

Let $A$ be an Artinian ring and $N$ the radical of $A$. The factor ring $A/N$ is always Artinian (moreover, semisimple), but the radical $N$ — considered as a ring — need not be Artinian. We seek for a necessary and sufficient condition for $N$ to be again an Artinian ring.

If the radical $N$ of an Artinian ring $A$ is itself an Artinian ring, then $N$ is a nilpotent Artinian ring and therefore it has a structure described in [6]. Consequently, $N$ is a torsion ring with minimum condition for subgroups, i. e. the direct sum of a finite number of groups $\mathfrak{C}(p^k)$ with $1 \leqq k \leqq \infty$.

Conversely, if the radical $N$ of an Artinian ring $A$ possesses this additive structure, then $N$ satisfies the minimum condition for subgroups and therefore is itself an Artinian ring. We have thus proved

Theorem 8. *The radical $N$ of an Artinian ring $A$ is itself an Artinian ring if and only if it is the direct sum of a finite number of groups $\mathfrak{C}(p^k)$ with $1 \leqq k \leqq \infty$. — If $A$ contains no subgroup of type $p^\infty$, this condition reduces to the finiteness of $N$.*

With the aid of this result it is easy to construct an Artinian ring (for example, using Theorem 1) in which the radical is not an Artinian ring.

---

[17]) Any simple $A$-module not annihilated by $A$ is known to be isomorphic to some minimal left ideal of the semisimple ring $A/N$ ($N$ the radical of $A$); see e. g. [8], p. 170.

Finally, let us mention that the Artinian character of the radical implies that in the third summand of (2) there is but a finite number of subgroups $\mathfrak{C}(p^k)$ with $k > 1$.

## Bibliography.

[1] Y. Akizuki, Teilerkettensatz und Vielfachenkettensatz, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, **17** (1935), 337—345.

[2] R. Baer, The subgroup of elements of finite order of an abelian group, *Annals of Math.*, (2) **37** (1936), 766—781.

[3] L. Fuchs, Ringe und ihre additive Gruppe, *Publicationes Math. Debrecen*, **4** (1956), 488—508.

[4] Ch. Hopkins, Rings with minimal condition for left ideals, *Annals of Math.*, (2) **40** (1939), 712—736.

[5] T. Szele, Ein Analogon der Körpertheorie für Abelsche Gruppen, *Journ. f. reine u. angew. Math.*, **188** (1950), 167—192.

[6] T. Szele, Nilpotent Artinian rings, *Publicationes Math. Debrecen*, **4** (1955), 71—78.

[7] J. Szendrei, On the extension of rings without divisors of zero, *these Acta*, **13** (1950), 231—234.

[8] B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, vol. II (Berlin, 1940).

*(Received December 30, 1955.)*

# Une généralisation du théorème de Simmons.

Par I. B. HAÁZ à Budapest.

La probabilité constante d'un événement soit $p$; la probabilité pour que cet événement se présente $r$ fois et ne se présente pas $n-r$ fois en $n$ épreuves est

$$P_r = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \qquad (q = 1-p).$$

Le théorème de T. C. SIMMONS [1] affirme que *si* $p < \frac{1}{2}$ *et si* $np$ *est entier, il y a plus de chances que l'événement arrive moins de* $np$ *fois que plus de* $np$ *fois:*

$$\sum_{r=0}^{np-1} P_r > \sum_{r=np+1}^{n} P_r.$$

Dans le cas où $np$ n'est pas entier, ce théorème n'est pas en général vrai (cf. CH. JORDAN [2]).

Au contraire, le théorème suivant est toujours vrai:

Théorème. *Si* $p < \frac{1}{2}$ *et si* $h$ *est l'entier égal ou immédiatement supérieur à* $np$*, il y a plus de chances que l'événement arrive moins de* $h$ *fois que plus de* $h$ *fois:*

$$\sum_{r=0}^{h-1} P_r > \sum_{r=h+1}^{n} P_r \qquad \left(h = np + d \leqq \frac{n+1}{2},\ 0 \leqq d < 1\right).$$

Ce théorème embrasse évidemment le théorème de SIMMONS.

Pour le démontrer, examinons les rapports

$$R_i = \frac{P_{h-i}}{P_{h+i}} = \frac{h-i+1}{n-h-i+1} \cdots \frac{h-1}{n-h-1} \frac{h}{n-h} \frac{h+1}{n-h+1} \cdots \frac{h+i}{n-h+i} \left(\frac{q}{p}\right)^{2i}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k; \quad k = \min\,(h, n-h)).$$

Le premier de ces rapports est

$$R_1 = \frac{P_{h-1}}{P_{h+1}} = \frac{h}{n-h} \frac{h+1}{n-h+1} \frac{q^2}{p^2} = \frac{npq+dq}{npq-dp} \frac{npq+dq+q}{npq-dp+p} > 1.$$

Pour examiner les rapports $R_2, R_3, \ldots, R_k$, posons

$$S_i = \frac{R_i}{R_{i-1}} = \frac{h-i+1}{n-h-i+1} \, \frac{h+i}{n-h+i} \, \frac{q^2}{p^2} \qquad (i=2, 3, \ldots, k);$$

on a pour $i=3, 4, \ldots, k$:

$$S_i - S_{i-1} = \left( \frac{h-i+1}{n-h-i+1} \, \frac{h+i}{n-h+i} - \frac{h-i+2}{n-h-i+2} \, \frac{h+i-1}{n-h+i-1} \right) \frac{q^2}{p^2}.$$

On en tire que

$$\operatorname{sgn}(S_i - S_{i-1}) = \operatorname{sgn}[(h-i+1)(h+i)(n-h-i+2)(n-h+i-1) -$$
$$-(n-h-i+1)(n-h+i)(h-i+2)(h+i-1)] =$$
$$= \operatorname{sgn}\left[4(i-1)(n+1)\left(h-\frac{n}{2}\right)\right],$$

c'est-à-dire que

$$\operatorname{sgn}\left( \frac{R_i}{R_{i-1}} - \frac{R_{i-1}}{R_{i-2}} \right) = \operatorname{sgn}\left(h - \frac{n}{2}\right).$$

Donc on a pour $i=3, 4, \ldots, k$:

$$\frac{R_i}{R_{i-1}} \gtreqless \frac{R_{i-1}}{R_{i-2}} \quad \text{selon que} \quad h \gtreqless \frac{n}{2}.$$

Il y a trois cas à distinguer:

1. En cas où $h = \frac{n+1}{2}$, on a $h > \frac{n}{2} > n-h$, donc

$$\frac{R_k}{R_{k-1}} > \frac{R_{k-1}}{R_{k-2}} > \cdots > \frac{R_2}{R_1} = \frac{h-1}{n-h-1} \, \frac{h+2}{n-h+2} \, \frac{q^2}{p^2} > 1.$$

Comme $R_1 > 1$, il en résulte que

$$R_k > R_{k-1} > \cdots > R_2 > R_1 > 1.$$

En ce cas $k = n-h$, $h-k=1$, $h+k=n$, donc on a

$$\frac{P_1}{P_n} > \frac{P_2}{P_{n-1}} > \cdots > \frac{P_{h-2}}{P_{h+2}} > \frac{P_{h-1}}{P_{h+1}} > 1.$$

Par conséquent

$$P_{h-1} > P_{h+1}, \; P_{h-2} > P_{h+2}, \; \ldots, P_2 > P_{n-1}, \; P_1 > P_n,$$

et évidemment $P_0 > 0$. L'addition de ces inégalités vérifie notre théorème dans le cas envisagé.

2. En cas où $h = \frac{n}{2}$, on a

$$\frac{R_k}{R_{k-1}} = \frac{R_{k-1}}{R_{k-2}} = \cdots = \frac{R_2}{R_1} = \frac{q^2}{p^2} > 1,$$

donc

$$R_k > R_{k-1} > \cdots > R_2 > R_1 > 1.$$

En ce cas $k = h = n-h$, $h-k = 0$, $h+k = n$, donc

$$\frac{P_0}{P_n} > \frac{P_1}{P_{n-1}} > \cdots > \frac{P_{h-1}}{P_{h+1}} > 1,$$

c'est-à-dire

$$P_{h-1} > P_{h+1},\ P_{h-2} > P_{h+2},\ \ldots,\ P_1 > P_{n-1},\ P_0 > P_n,$$

Par addition, notre théorème en résulte aussi dans le cas où $h = \frac{n}{2}$.

3. En cas où $h < \frac{n}{2} < n-h$, on a $k = h$ et

$$\frac{R_h}{R_{h-1}} < \frac{R_{h-1}}{R_{h-2}} < \cdots < \frac{R_2}{R_1}.$$

Nous savons que $R_1 > 1$, mais il est possible qu'il y ait un $R_i \leqq 1$. Dans ce cas, soit $j$ le plus petit des indices $i$ pour lesquels cette inégalité subsiste, $1 < j \leqq h$. On a alors $R_j : R_{j-1} < 1$, et comme le rapport $R_i : R_{i-1}$ diminue lorsque $i$ augmente, on a aussi $R_i : R_{i-1} < 1$ pour $i \geqq j$. Donc

$R_1 > 1, \ldots, R_{j-1} > 1,\ R_j \leqq 1,\ R_{j+1} < 1, \ldots$ et par conséquent

$$(*)\ \begin{cases} P_{h-i} > P_{h+i} & (i = 1, 2, \ldots, j-1), \\ P_{h-i} \leqq P_{h+i} & (i = j, j+1, \ldots, n-h) \end{cases}$$

lorsqu'on convient de poser $P_i = 0$ pour $i < 0$. Les inégalités (*) restent valables aussi dans le cas où $R_i > 1$ pour tous les $i$, si l'on convient de poser dans ce cas $j = h+1$.

Dans la suite, nous pouvons procéder suivant la méthode de E. FELDHEIM [3]. Multiplions chacune des inégalités (*) par le facteur $j-i$, qui est positif pour $i = 1, \ldots, j=1$, égal à 0 pour $i = j$, et négatif pour $i = j+1, \ldots, n-h$. On obtient

$$(j-i) P_{h-i} \geqq (j-i) P_{h+i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-h)$$

avec le signe $=$ seulement pour $i = j$. Par addition (omettant les probabilités égales à 0) il en résulte que

$$\sum_{i=1}^{h} (j-i) P_{h-i} > \sum_{i=1}^{n-h} (j-i) P_{h-i},$$

donc

$$\sum_{r=0}^{h-1} (j-h+r) P_r > \sum_{r=h+1}^{n} (j-r+h) P_r.$$

La moyenne des écarts $np-r$ étant nulle, on a

$$\sum_{r=0}^{h-1}(np-r)P_r=\sum_{r=h}^{n}(r-np)P_r \geqq \sum_{r=h+1}^{n}(r-np)P_r.$$

En ajoutant cette inégalité à l'inégalité précédente, nous obtenons:

$$(np-h+j)\sum_{r=0}^{h-1}P_r>(j+h-np)\sum_{r=h+1}^{n}P_r.$$

Comme $h=np+d$,

$$(j-d)\sum_{r=0}^{h-1}P_r>(j+d)\sum_{r=h+1}^{n}P_r,$$

et à plus forte raison:

$$\sum_{r=0}^{h-1}P_r>\sum_{r=h+1}^{n}P_r,$$

ce qui achève la démonstration de notre théorème.[1])

## Littérature.


[1] T. C. Simmons, A New Theorem of Probability, *Proceedings London Math. Soc.*, **26** (1894—95), 290—334.

[2] Ch. Jordan, Complément au théorème de Simmons sur les probabilités, *ces Acta*, **11** (1946—48), 19—27.

[3] E. Feldheim, Simmons valószínűségszámítási tételének új bizonyítása, és általánosítása, *Mat. és Fiz. Lapok*, **45** (1938), 99—113. Résumé en français, 113—114.


*(Reçu le 20 novembre 1955)*

[1]) Ce théorème a été présenté à l'"Académie Saint Étienne" de Budapest, en sa séance du 23 janvier 1948.

# Über endliche Gruppen, die nur einen echten Normalteiler besitzen.

Von J. SZÉP in Szeged.

In der Gruppentheorie, besonders in der Theorie der endlichen Gruppen, spielen die Untersuchungen, die aus der Einfachheit oder Nichteinfachheit der Gruppen auf ihre Struktur schließen, eine wichtige Rolle. Die Gruppen, die nur einen einzigen echten Normalteiler haben, stehen den einfachen Gruppen sehr nahe. Unsere Aufgabe ist die Untersuchung der Struktur dieser Gruppen, und wir werden sehen, daß diese Gruppen gut charakterisierbar sind. Neulich unternahm TAUNT [1] die Untersuchung der allgemeineren Gruppenklasse in der jede Gruppe eine einzige charakteristische Untergruppe besitzt.

Satz. *Es sei $G$ eine endliche Gruppe. Der Normalteiler $N(\neq 1, G)$ von $G$ ist der einzige Normalteiler in $G$ dann und nur dann, wenn $N$ kein direkter Faktor von $G$ ist und einer der folgenden Fälle* 1—3 *statthat:*

1) $G = HN$ $(H \cap N = 1)$, *wobei $H$ eine einfache Gruppe ist und*

*a) $N$ ist einfach, oder*

*b) $N$ ist eine nichteinfache elementare abelsche Gruppe und die einfachen Untergruppen von $N$ sind konjugiert in $G$, oder*

*c) $N$ ist das direkte Produkt von mindestens zwei einfachen Gruppen von zusammengesetzter Ordnung, die in $G$ konjugiert sind;*

2) *$N$ ist die Frattinische Untergruppe von $G$ und zugleich eine elementare abelsche Gruppe, ferner sind die einfachen Untergruppen von $N$ konjugiert in $G$, außerdem ist $G/N$ einfach;*

3) $G = HN$ $(H \cap N = D \neq 1)$, *wobei $N$ das direkte Produkt von einfachen Untergruppen von zusammengesetzter Ordnung ist, die in $G$ konjugiert sind, außerdem ist $D$ die Frattinische Untergruppe von $H$ mit einfacher Faktorgruppe $H/D$.*

Beweis. Zuerst zeigen wir, daß falls $N$ der einzige Normalteiler von $G$ ist, so $G$ zu einem der oben erwähten Typen gehört.

Es ist klar, daß $N$ in $G$ kein direkter Faktor ist. $N$ besitzt offenbar keine charakteristische Untergruppe, also ist $N$ das direkte Produkt isomorpher einfacher Gruppen: $N = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r (r \geqq 1)$. (Vgl. ZASSENHAUS [2].)

Es ist klar, daß es in der Faktorisation $N = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r (r > 1)$ (ist $N$ eine elementare Abelsche Gruppe oder nicht) zu jedem beliebigen Paar $E_i, E_k (i \neq k;\ i, k = 1, \ldots, r)$ ein Element $g$ in $G$ zu finden ist, so, daß $gE_ig^{-1} = E_k$ besteht. Im entgegengesetzten Fall gäbe es nämlich eine echte Unterguppe in $N$, die Normalteiler in $G$ ist. Das ist aber unmöglich.

Ist $N$ keine elementare Abelsche Gruppe und hat $G$ eine Untergruppe $H$ mit der Eigenschaft $G = HN (H \cap N = 1)$, so ist klar, daß $H (\approx G/N)$ eine einfache Gruppe sein muß.

Wenn $N$ eine elementare Abelsche Gruppe ist, und es eine maximale Untergruppe $M$ in $G$ gibt so, daß $G = MN$ gilt, dann ist $M \cap N = 1$. Im Falle $M \cap N = D \neq 1$ wäre nämlich $D$ Normalteiler in $G$, das der Tatsache, daß $N$ einziger Normalteiler in $G$ ist widerspricht (Fall 1) a, b). Wenn $N$ in jeder maximalen Untergruppen von $G$ enthalten ist, so fällt $N$ offenbar mit der Frattinischen Untergruppe von $G$ zusammen. Es ist auch klar, daß $G/N$ einfach ist (Fall 2).

Ist $N$ eine einfache Gruppe von zusammengesetzter Ordnung, oder ein direktes Produkt von Gruppen zusammengesetzter Ordnung, so kann $N$ nicht die Frattinische Untergruppe von $G$ sein, da die Frattinische Untergruppe einer endlichen Gruppe nilpotent ist. (S. FRATTINI [3]). Es sei $H$ eine Untergruppe minimaler Ordnung in $G$, für die $HN = G$ ist. Sei $D = H \cap N$. Wir zeigen daß $D$ die Frattinische Untergruppe von $H$ ist. Bezeichne nämlich $F$ die Frattinische Untergruppe von $H$. $D$ kann keine echte Untergruppe von $F$ sein, da dann $N \subset FN \subset G$ wäre; andererseits ist $FN$ offenbar Normalteiler in $G$, womit wir zu einem Widerspruch gelangen sind. Jetzt zeigen wir $D = F$; im entgegengesetzten Fall ist $D$ wegen der vorher gesagten nicht in $F$ enthalten, also besitzt $H$ eine maximale Untergruppe $H'$, die $D$ nicht enthält. In diesem Fall ist aber $H = H'D$, also $G = H'N$, was der Minimumeigenschaft von $H$ widerspricht. Die Gruppe $H/D$ ist einfach, da es im entgegengesetzten Fall einen echten Normalteiler $H' (\supset D)$ in $H$ gäbe und die Gruppe $H'N$ ein echter Normalteiler in $G$ wäre, was ein Widerspruch ist. (So gehört $G$ zum Fall 3.) Ist $G = HN (H \cap N = 1)$, so ist $H$ offenbar einfach. (Dann gehört $G$ zum Fall 1.)

Jetzt beweisen wir die Behauptung „dann" des Satzes, d. h. wir zeigen, daß in den im Satze aufgezählten Fällen $N$ der einzige Normalteiler ist.

Zuerst zeigen wir (das bezieht sich auf alle drei Fälle), daß $N$ keine echte Untergruppe $N'$ enthält, die Normalteiler in $G$ ist. Ist $N$ einfach, so ist die Behauptung klar. Nehmen wir an, daß $N$ das direkte Produkt von einfachen Gruppen zusammengesetzter Ordnung ist: $N = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r$. Wir werden zeigen, daß wenn $N'$ Normalteiler in $N$ ist, dann $N'$ eine der einfachen Gruppen $E_1, E_2, \ldots, E_r$ enthält, woraus sogleich folgt (da $E_1, E_2, \ldots, E_r$ zueinander konjugiert sind), daß $N'$ kein Normalteiler in $G$ sein kann. $N'$ enthält offenbar ein Element der Gestalt $e_1 e_2 \ldots e_r (e_i \in E_i; i = 1, \ldots, r; e_1 \neq 1)$. So enthält $N'$ auch die Elemente $n_x = xe_1x^{-1}e_2 \ldots e_r$ und $n_y = ye_1^{-1}y^{-1}e_2^{-1} \ldots e_r^{-1}$, wo $x, y$ die Elemente von $E_1$ durchlaufen. Die Produkte $n_x n_y = xe_1x^{-1}ye_1^{-1}y^{-1} (\in N')$ sind Elemente von $E_1$. Die Gruppe, die durch diese Elemente (Produkte) erzeugt wird ist offenbar Normalteiler in $E_1$, also ist sie $E_1$ gleich, womit wir unsere Behauptung bewiesen haben. Auch wenn $N$ eine elementare Abelsche Gruppe ist ($N = P_1 \times \cdots \times P_r$; $P_1, \ldots, P_r$ Gruppen von Primzahlordnung), kann es in $N$ keine echte Untergruppe geben, die Normalteiler in $G$ ist. Nehmen wir nämlich an, daß $N' = P_1' \times \cdots \times P_s'$ ($P_1', \ldots, P_s'$ Gruppen von Primzahlordnung, $s < r$) eine Untergruppe in $N$ ist. $N$ besitzt eine Faktorisation $N = P_1' \times \cdots \times P_s' \times P_{s+1}' \times \cdots \times P_r'$ ($P_{s+1}', \ldots, P_r'$ Gruppen von Primzahlordnung). Nach der Annahme des Satzes gibt es ein Element $g$ in $G$ so, daß $gP_1'g^{-1} = P_{s+1}'$ gilt, also folgt, daß $N'$ kein Normalteiler in $G$ sein kann.

Nunmehr betrachten wir zuerst den Fall 1. Sei $L (\subsetneqq N, \neq H)$ ein echter Normalteiler von $G$. Aus den vorher gesagten und aus der Einfachheit von $H$ folgt $L \cap N = L \cap H = 1$. Da $L \cap N = 1$ ist, ist $LN = L \times N$. Der Fall $G \supset L \times N (\supset N)$ kann nicht bestehen, da aus diesem $H \cap (L \times N) \neq 1$ folgen würde, was der Einfachheit von $H$ widerspricht. $G = L \times N$ ist auch unmöglich.

Wir betrachten dann den Fall 2. Sei $L (\subsetneqq N)$ echter Normalteiler in $G$. Die Gruppe $LN$ ist echter Normalteiler von $G$, da $N$ die Frattinische Untergruppe ist. Dann ist aber $G/N$ nicht einfach, in Gegensatz zur Voraussetzung des Satzes.

Endlich betrachten wir den Fall 3. Sei $L (\subsetneqq N)$ echter Normalteiler in $G$. $L \supset N$ kann nicht bestehen, da daraus $H \cap L \supset D$ folgen würde, was der Einfachheit von $H/D$ widerspricht. Deshalb ist $L \cap N = 1$, woraus $LN = L \times N$ folgt. Es ist $L \times N \subsetneqq G$, da im entgegengesetzten Fall $H \cap (L \times N) \supset D$ folgen würde, was der Einfachheit von $H/D$ widerspricht. Der Fall $L \times N = G$ kann auch nicht bestehen (nach der Annahme des Satzes). Es ist evident, daß auch $H \cap L = 1$ gilt.

1. Bemerkung. In den Fällen 1 und 3, wenn $N$ keine zu $H$ isomorphe Untergruppe enthält, folgt, daß $N$ in $G$ kein direkter Faktor ist. Es sei nämlich $G = HN = L \times N$. Wir können annehmen, daß $N$ eine einfache Gruppe ist. Man kann die Elemente von $H$ in der Form $l_i n_i (i = 1, 2, \ldots; l_i \in L, n_i \in N)$ annehmen. Die Elemente $n_i (i = 1, 2, \ldots)$ von $N$ sind (wegen $H \cap L = 1$) verschieden, außerdem bilden sie eine zu $H$ isomorphe Untergruppe von $N$.

2. Bemerkung. Die auflösbaren Gruppen $G$, die nur einen echten Normalteiler besitzen, können genau angegeben werden. Wenn für $G$ der Fall 1 vorliegt, dann ist $H$ offenbar eine Gruppe von Primzahlordnung und $N$ eine elementare Abelsche Gruppe. $G$ kann keine Gruppe von Primzahlpotenzordnung sein, also sind die Ordnungen von $H$ und $N$ relativ prim. Es ist auch klar, daß $H$ eine maximale Untergruppe in $G$ ist, woraus leicht folgt, daß $G$ eine (zentrumlose) einstufig nichtabelsche Gruppe ist. Diese Gruppen sind vollständig bekannt (S. z. B. RÉDEI [4]).

Im Fall 2 ist $G/N$ offenbar eine Gruppe von Primzahlordnung und $G$ selbst eine Gruppe von Primzahlpotenzordnung. Es ist leicht zu sehen, daß unter diesen nur die zyklische Gruppe der Ordnung $p^2$ ($p$ Primzahl) unseren Bedingungen entspricht.

Zum Fall 3 gehört offenbar keine auflösbare Gruppe.

## Literaturverzeichnis.

[1] D. R. TAUNT, Finite groups having unique proper characteristic subgroup, *Proc. Cambridge Philos Soc.*, **51** (1955), 25—36.

[2] H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie* (Leipzig und Berlin 1937), S. 77, Satz 2.

[3] G. FRATTINI, Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni, *Rend. Atti R. Accad. Lincei*, (4) **1** (1885), 281—285, 455—457.

[4] L. RÉDEI, Das "schiefe Produkt" in der Gruppentheorie, *Commentarii Math. Helvetici*, **20** (1947), 225—264.

(*Eingegangen am 16. März 1955.*)

# Construction des familles de fonctions partout continues non dérivables.

*En souvenir de Béla Kerékjártó, au dixième anniversaire de sa mort.*

Par MIKLÓS MIKOLÁS à Budapest.

**1.** Depuis que l'exemple classique de WEIERSTRASS:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

$\left(a \text{ entier, impair}; \; 0 < b < 1, \; ab > 1 + \frac{3}{2}\pi\right)$ a été publié[1]), beaucoup d'auteurs se sont occupés des *fonctions continues sans dérivées*. KNOPP[2]) discute la plupart des exemples trouvés jusqu'à 1918 sur la base d'un procédé uniforme et général. Le sujet inspirait aussi des recherches plus récentes: outre l'exemple élégant de VAN DER WAERDEN $\left(V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n}((10^n x)), \; ((x))\right.$ désignant la distance de $x$ à l'entier le plus proche$\left.\right)$ et d'autres exemples tout à fait particuliers[3]), citons certains résultats des écoles mathématiques polonaise et indienne, fournissant des classifications des exemples suivant les nombres de DINI resp. les zéros des fonctions en question.[4])

Dans cet article, je vais donner une *méthode* simple nouvelle à construire des fonctions continues sans dérivée (théorème 2), qui s'appuye, à la différence de KNOPP, sur le critère (1) nécessaire et suffisant de la dérivabilité. Remarquons que la classe des fonctions ainsi obtenues contient presque tous les exemples relatifs de la littérature, sauf certains de caractère arithmétique. Dans un cas très particulier que l'on peut considérer comme un „paradigme"

---

1) V. [6] et aussi [22].

2) [12]. — KNOPP traite des fonctions périodiques $f(x)$ qui s'obtiennent des lignes brisées par l'opération limite; il exige que les deux limites ($\underline{\lim}$ et $\overline{\lim}$) de $[f(x+h)-f(x)]/h$ soient égales à $+\infty$ resp. $-\infty$ pour toute valeur de $x$ à l'intérieur de l'intervalle de définition.

3) Cf. outre [21] (démonstration de HEYTING) par ex. [3], [4], [8], [10], [13], [20].

4) Cf. par ex. [2], [15], [16], [17] resp. [14], [18] et encore [1].

du procédé, il résulte un *exemple élémentaire* pour lequel la vérification de la continuité et non-dérivabilité s'effectue en deux phrases (théorème 1). En considérant des fonctions de la forme $\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi(\nu_k x)$ où $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|<\infty$ et $\nu_k|\nu_{k+1}$ ($k=0,1,\ldots$) on parvient à des *résultats de type nouveau:* $\Phi(x)$ est continue, non dérivable pour $\varphi(x)$ arbitraire, composée de traits *convexes* (ou concaves) resp. $\in \mathrm{Lip}\,1$, périodique, à supposer que $c_k, \nu_k$ satisfont certaines relations limites bien réalisables (théorèmes 4—6). Comme corollaires s'obtiennent des propositions généralisant de plusieurs points de vue l'exemple de WEIERSTRASS et celui de VAN DER WAERDEN (théorèmes 3 et 7).

**2.** Soit $f(x)$ une fonction définie sur un segment[5]) et supposons que, dans un point $a$ intérieur de ce segment, $f(x)$ admet une dérivée finie et déterminée. Alors, si petit que soit le nombre $\varepsilon>0$, on a un $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tel que l'inégalité

$$(1)\qquad \left|\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}-\frac{f(u_1)-f(u_2)}{u_1-u_2}\right|<2\varepsilon$$

est vérifiée pour *tous* les couples $t_1\neq t_2$, $u_1\neq u_2$ avec $a-\delta<t_1\leqq a\leqq t_2<$ $<a+\delta$ et $a-\delta<u_1\leqq a\leqq u_2<a+\delta$.[6])

Soient donnés deux points: $P_1(x_1,y_1)$ et $P_2(x_2,y_2)$, $x_1<x_2$; nous considérons le point[7]) $M(\xi,\eta)$ avec $\xi=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $\eta=\frac{1}{2}(y_1+y_2)+\frac{1}{2}(x_2-x_1)$ et les segments $\overline{MP_1}, \overline{MP_2}$. Ces derniers seront appelés les *contributions* de $\overline{P_1P_2}$ et $P_1MP_2\triangle$ un *triangle de contribution.* On a les pentes des côtés:
$\frac{\eta-y_1}{\xi-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+1$, $\frac{y_2-\eta}{x_2-\xi}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-1$.

Formons les contributions des segments $[i,i+1]$ ($i=0,\pm1,\ldots$) de l'axe des $x$; la ligne brisée ainsi obtenue représente une fonction continue $G_1(x)$. Formons maintenant les contributions des „cotés" de cette ligne brisée, nous obtenons ainsi la fonction continue $G_2(x)$ et, en répétant ce procédé, la fonction $G_3(x)$ etc.

Théorème 1. *(I) La fonction* $G(x)=\lim_{n\to\infty} G_n(x)$ *est partout continue, mais (II) elle n'admet de dérivée en aucun point. — On a la représentation* $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}((2^k x))$, $((x))$ *signifiant la distance de x à l'entier le plus proche.*

---

[5]) Nous réservons ce mot (suivant DENJOY) pour un ensemble linéaire connexe et *fermé,* cependant $(a,b)$ signifiera toujours un intervalle *ouvert.*

[6]) En vertu du critère de convergence de CAUCHY, cette condition est aussi *suffisante* pour la dérivabilité.

[7]) La signification géométrique de $M$ est évidente.

Démonstration. Il est clair que $G_{k+1}(x) - G_k(x) \leqq 2^{-(k+1)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, donc $G_n(x) = G_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} [G_{k+1}(x) - G_k(x)]$ $(n = 2, 3, \ldots)$ converge uniformément pour $-\infty < x < \infty$ et il s'ensuit (I). Quant à (II), remarquons que le graphique de $G(x)$ contient évidemment les sommets de tout triangle de contribution employé; ainsi, étant donné un point $a$ et un intervalle $(a - \delta, a + \delta)$ quelconque, il y existe trois points de la forme $x_1 = r \cdot 2^{-k}$, $x_2 = (r+1)2^{-k}$, $\xi = (2r+1)2^{-k-1}$ ($r$ entier) avec $a \in [x_1, x_2]$ et

$$\frac{G(\xi) - G(x_1)}{\xi - x_1} - \frac{G(x_2) - G(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{G(x_2) - G(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{G(x_2) - G(\xi)}{x_2 - \xi} = 1,$$

en contradiction à (1).

Quant à la représentation en question, elle s'ensuit de ce que, en posant $G_0(x) \equiv 0$, la différence $G_{k+1}(x) - G_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ a la valeur $2^{-k-1}$ au milieu de chaque intervalle $[r \cdot 2^{-k}, (r+1)2^{-k}]$, s'annule aux extrémités, et est lineaire dans les deux moitiées de cet intervalle.[8])

**3.** L'essentiel simple du raisonnement précédent peut être exprimé (un peu plus généralement) de la manière suivante:

Lemme. *Soit $f(x)$ définie sur un segment $I$ et soit $a$ un point intérieur à $I$. Si tout intervalle de la forme $(a - \delta, a + \delta)$, appartenant à $I$, contient trois points équidistants $x_0 - h, x_0, x_0 + h$ $(h > 0)$ tels que $a \in [x_0 - h, x_0 + h]$ et*

$$\left| f(x_0) - \frac{1}{2} [f(x_0 + h) + f(x_0 - h)] \right| \geqq 2h \cdot \lambda, \tag{2}$$

*$\lambda$ désignant un nombre positif fixe, alors $f(x)$ n'est pas dérivable au point $a$.*

En effet, on voit de (2) que la différence

$$\begin{aligned} d &= \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned} \tag{3}$$

n'est pas inférieure à $2\lambda$ en valeur absolue, mais c'est en contradiction à la condition (1), pourvu que $\delta$ est choisi suffisamment petit.

Soit $\lambda > 0$ donné une fois pour toutes. Il est évident que, $Q(x, y)$ et $Q'(x', y')$ désignant deux points donnés avec $x < x'$, on peut construire tou-

---

8) La série $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}((2^k x))$ peut être étudiée aussi, naturellement, par la méthode de VAN DER WAERDEN (cf. [10], [13], [20]); il semble que cette série a été donnée premièrement par [19] sous une toute autre forme, c'est-à-dire par un procédé arithmétique.

jours facilement un point $P(\xi, \eta)$ tel que $\xi = \frac{1}{2}(x+x')$, $\left|\eta - \frac{1}{2}(y+y')\right| \geqq$ $\geqq \lambda(x'-x)$ (cf. (2)); $P$ sera appelé un *associé* de $Q$ et $Q'$.

Nous allons donner, sur la base du lemme ci-dessus, une *méthode générale* pour construire des *familles de fonctions continues sans dérivée.* — Soient $y = F_0(x)$ une fonction partout continue, $Q_i(a_i, b_i)$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ une suite de points avec $a_i < a_{i+1}$, $b_i = F_0(a_i)$, $\lim_{i\to\infty} a_i = \infty$, $\lim_{i\to-\infty} a_i = -\infty$ et soit $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n$ une série convergente de nombres positifs. Nous envisageons le $\varrho_1$-voisinage[9]) $V_{\varrho_1}$ du graphique $y = F_0(x)$ et faisons correspondre à un arc $[Q_i, Q_{i+1}]$ quelconque du graphique un système de points $P_r(x_r, y_r)$ $(r = 0, 1, \ldots, m)$ de sorte que 1) $P_0, P_m$ sont identiques à $Q_i$ resp. $Q_{i+1}$, $P_r \in V_{\varrho_1}$ et $x_r < x_{r+1}$ $(r = 0, 1, \ldots, m-1)$; 2) il y a un associé $P_r^* \in V_{\varrho_1}$ de tout couple $P_r, P_{r+1}$.[10]) Formons maintenant un arc de courbe dans $V_{\varrho_1}$ auquel appartiennent tous les points $P_r$ et $P_r^*$ et dont la projection sur l'axe des $x$ est le segment $[a_i, a_{i+1}]$; il soit appelé un *adjoint* de premier ordre de l'arc $[Q_i, Q_{i+1}]$. De même, si l'on forme le $\varrho_2$-voisinage $V_{\varrho_2}$ de cet adjoint, si on fait correspondre à chacun de ses arcs $[P_r, P_r^*]$, $[P_r^*, P_{r+1}]$ un système fini de points, d'une manière analogue que $\{P_r\} \cup \{P_r^*\}$ à $[Q_i, Q_{i+1}]$ plus haut, et si l'on fait passer par chaque système ainsi obtenu un arc $\subset V_{\varrho_2}$, on parvient à $2m$ adjoints de second ordre de $[Q_i, Q_{i+1}]$. Le pas prochain du procédé fournit les adjoints de troisième ordre $(\subset V_{\varrho_3})$ de $[Q_i, Q_{i+1}]$ etc. — La fonction continue représentée par les adjoints de premier ordre de tout arc $[Q_i, Q_{i+1}]$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ soit appelée $y = F_1(x)$, la fonction définie par tous les adjoints de second ordre soit $y = F_2(x)$ etc.

Théorème 2. *$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$ est partout continue mais n'est dérivable en aucun point.*

Démonstration. 1° D'après la construction, on a les inégalités $|F_{k+1}(x) - F_k(x)| < \varrho_{k+1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$; comme $\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_{k+1} < \infty$, cela entraîne la convergence uniforme de la suite:

$$F_n(x) = F_0(x) + \sum_{k=0}^{n-1} [F_{k+1}(x) - F_k(x)] \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

---

[9]) Dans les lignes suivantes, c'est l'ensemble des points $(x, y)$ avec $a \leqq x \leqq a'$, $f(x) - \varrho < y < f(x) + \varrho$ que nous appelons le „$\varrho$-voisinage" d'un arc $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq a')$. — Les termes „arc" ou „arc de courbe" seront réservés pour des courbes de Jordan admettant une représentation analytique de la forme $y = y(x)$ où $y(x)$ est *uniforme* et continue.

[10]) Il est clair que tout système $\{P_r\}$ avec 1) satisfait à 2) pourvu que $\max(x_{r+1} - x_r)$ soit assez petit.

et, puisque chaque $F_n(x)$ est partout continue, à la fois la continuité de $F(x)$ pour $-\infty < x < \infty$.

Désignons par $E_n$ l'ensemble composé des extrémités de tous les adjoints d'ordre $n$. D'après la condition 1), les points de $E_n$ appartiennent simultanément aux graphiques $F_n(x), F_{n+1}(x), F_{n+2}(x), \ldots$ et ainsi à la courbe de $F(x)$ aussi ($n=1, 2, \ldots$). Par conséquent, le graphique de $F(x)$ contient $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

2° Nous remarquons tout d'abord que (à cause de l'usage des points associés) la projection de tout adjoint de second ordre de $[Q_i, Q_{i+1}]$ sur l'axe des $x$ possède une longueur $\leqq \frac{1}{2}(a_{i+1}-a_i)$, la projection de chacun des adjoints de troisième ordre est d'une longueur $\frac{1}{4}(a_{i+1}-a_i)$ au plus etc. ($i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Ceci entraîne évidemment que, un arc $[Q_i, Q_{i+1}]$ et un nombre $\delta$ positif quelconque étant fixés, il existe un entier $N=N(\delta)$ tel que toutes les projections des adjoints d'ordre $n \geqq N$ de $[Q_i, Q_{i+1}]$ sont d'une longueur inférieure à $\delta$; en outre, la projection de $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ est partout dense sur l'axe des $x$.

Soient donnés maintenant un point $x=a$ et un intervalle $(a-\delta, a+\delta)$; choisissons $i$ de sorte que $a$ appartienne au segment $[a_i, a_{i+1}]$ et $N$ de la manière que nous venons de mentionner. Alors, on peut trouver un adjoint $C_N$ (d'ordre $N$) tel que la projection de $C_N$ sur l'axe des $x$ contient le point $a$ et qu'elle est comprise entièrement dans $(a-\delta, a+\delta)$. Sur la base de la construction et 1°, $C_N$ contient trois points $Q(x, F(x)), P(\xi, F(\xi)), Q'(x', F(x'))$ tels que $a \in [x, x']$ et $P$ est un associé de $Q, Q'$; comme $[x, x'] \subset (a-\delta, a+\delta)$, et $\delta > 0$ est arbitraire, il s'ensuit immédiatement du lemme que $F(x)$ n'est pas dérivable au point $a$, c. q. f. d.

**4.** En ce qui concerne les *applications* du théorème 2, on peut vérifier d'abord sans peine que la plupart des exemples géométriques connus satisfont aux conditions en question (cf. [12]).

Si l'on pose $F_0(x)=f_0(x), F_{k+1}(x)-F_k(x)=f_{k+1}(x)$ ($k=0, 1, 2, \ldots$), c'est-à-dire $F_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$ ($n=0, 1, 2, \ldots$), il s'agit de la série

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), \tag{5}$$

dont les sommes partielles sont soumises à certaines restrictions. Ces dernières peuvent être réalisées le plus facilement de façon analytique, en tant que l'on considère des combinaisons linéaires de fonctions périodiques, dont les fréquences sont en rapport rationnel, et lesquelles s'annulent aux extrémités d'un intervalle de période. (On peut vérifier, par exemple, les conditions de théorème 2 pour $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(2\mu)^{-k}((2^k\mu^k x))$ $(n=0,1,2,\ldots)$, $F(x)=$ $=\sum_{k=0}^{\infty}(2\mu)^{-k}((2^k\mu^k x))$, $\mu$ désignant un entier positif $>1$ et $((x))$ ayant la même signification, qu'au théorème 1.)

**5.** Dans ce qui suit nous considérons toujours cette *représentation analytique.* — Fixons quelques *notations* et *restrictions* permanentes. $c_0, c_1, c_2, \ldots$ sont des coefficients réels $\neq 0$ pour lesquels $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|$ converge; $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots$ est une suite de nombres entiers positifs tels que $\nu_k$ est une diviseur de $\nu_{k+1}$, $\nu_k<\nu_{k+1}$ $(k=0,1,2,\ldots)$; nous écrirons $\nu_{k,l}=\frac{\nu_k}{\nu_l}$. Soit $\varphi(x)$ une fonction continue pour $-\infty<x<\infty$, ayant une période $p>0$, et soit

$$\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi(\nu_k x). \tag{6}$$

$\Phi(x)$ est évidemment une fonction partout continue.

Théorème 3. *Soit $\varphi(x)$ convexe (ou concave) sur le segment $[0,p]$. Supposons que $c_0, c_1, c_2, \ldots$ sont de même signe et qu'il y a une constante $\varrho>0$, telle que $\nu_k|c_k|\geqq\varrho$ $(k=0,1,2,\ldots)$.*

*Dans ces conditions, $\Phi(x)$ est p. c. n. d.*[11])

Nous allons donner une forme plus générale à cette proposition. Une fonction $f(x)$ est appelée *convexe par segments* dans $[a,b]$ avec les points de division $a=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m=b$, si $f(x)$ est continue en ces points et convexe ou linéaire sur chacun des segments $[x_{r-1},x_r]$ $(r=1,2,\ldots,m)$. Les fonctions concaves par segments sont définies d'une manière analogue.

Théorème 4. *Soit $\varphi(x)$ convexe (ou concave) par segments dans $[0,p]$ avec les points de division $\omega_r$ $(r=0,1,\ldots,m)$; soit $\varphi(0)>$ (resp. $<$) $\varphi\left(\frac{p}{2}\right)$. Supposons que 1) $c_0, c_1, c_2, \ldots$ sont de même signe; 2) il y a des*

[11]) Pour être court, nous abbrévions les mots: „partout continue non dérivable" par leurs initiales. — Maintenant et plus tard, nous faisons usage des définitions de Jensen [11]: une fonction $f(x)$ définie sur $[a,b]$, est dite convexe resp. concave sur ce segment, suivant que l'on a $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqq\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ resp. $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqq\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ pour tout couple $x_1, x_2\in[a,b]$, le signe d'égalité n'étant pas toujours valable (cas de linéarité).

*valeurs de $k$ arbitrairement grandes pour lesquelles les rapports* $\nu_{k,k-1}\cdot\omega_r/p$ *($r=0,1,\dots,m$) sont entiers ;* 3) $\varliminf_{k\to\infty}\nu_k|c_k|>0$.

*Dans ces conditions, $\Phi(x)$ est p. c. n. d.*

Démonstration. En vertu de 2), chaque rapport $\omega_r/p$ est rationnel (en particulier $\omega_0/p=0, \omega_m/p=1$) ; donc $\omega_r=\frac{\beta_r}{\gamma_r}p$ $(r=1,2,\dots,m-1)$ où $\beta_r,\gamma_r$ sont des entiers positifs sans diviseur commun. $\Gamma$ signifiant le plus petit multiple commun de $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{m-1}$, la condition 2) implique l'existence d'une suite $n_1<n_2<\cdots$ telle que $\nu_{k,k-1}$ est divisible par $\Gamma$ pour $k=n_1,n_2,\dots$. — En vertu de 3) il y a une constante $\varrho>0$ telle que $\nu_k|c_k|\geqq\varrho$ $(k=0,1,2,\dots)$.

Envisageons trois points équidistants de la forme $\frac{\mu}{\nu_n}p, \frac{2\mu+1}{2\nu_n}p, \frac{\mu+1}{\nu_n}p$ $(\mu=0,\pm1,\pm2,\dots)$ et formons la différence

$$\begin{aligned}\Delta&=\Phi\left(\frac{\mu}{\nu_n}p\right)+\Phi\left(\frac{\mu+1}{\nu_n}p\right)-2\Phi\left(\frac{2\mu+1}{2\nu_n}p\right)=\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left[\varphi\left(\frac{\mu\nu_k}{\nu_n}p\right)+\varphi\left(\frac{(\mu+1)\nu_k}{\nu_n}p\right)-2\varphi\left(\frac{(2\mu+1)\nu_k}{2\nu_n}p\right)\right]=\sum{}'+\sum{}''\end{aligned}\tag{7}$$

où

$$\begin{aligned}\sum{}'&=\sum_{k=0}^{n-1}c_k\left[\varphi\left(\frac{\mu}{\nu_{n,k}}p\right)+\varphi\left(\frac{\mu+1}{\nu_{n,k}}p\right)-2\varphi\left(\frac{2\mu+1}{2\nu_{n,k}}p\right)\right],\\ \sum{}''&=\sum_{k=n}^{\infty}c_k\left[\varphi(\mu\nu_{k,n}p)+\varphi((\mu+1)\nu_{k,n}p)-2\varphi\left((2\mu+1)\nu_{k,n}\frac{p}{2}\right)\right],\end{aligned}\tag{8}$$

$\nu_{n,k}$ $(k<n)$ et $\nu_{k,n}$ $(k\geqq n)$ étant des entiers positifs. — La valeur de $n$ soit restreinte dans ce qui suit aux termes de la suite $\{n_i\}$.

Puisqu'on a $\nu_{n,k}=\prod_{i=1}^{n-1}\nu_{i+1,i}$, les nombres $\nu_{n,0},\nu_{n,1},\dots,\nu_{n,n-1}$ sont divisibles par $\Gamma$; d'où il résulte qu'aucun point $\omega_r+sp$ $(r=0,1,\dots,m;$ $s=0,\pm1,\dots)$ ne se trouve à l'intérieur d'un segment de la forme $\left[\frac{\mu}{\nu_{n,k}}p,\frac{\mu+1}{\nu_{n,k}}p\right]$ $(k=0,1,\dots,n-1;\mu=0,\pm1,\dots)$. En utilisant la convexité (concavité) par segments de $\varphi(x)$ et la condition 1), on peut ainsi conclure à ce que tous les termes de $\sum{}'$ sont de même signe. — D'autre part, nous avons pour $\sum{}''$ évidemment $\varphi(\mu\nu_{k,n}p)=\varphi((\mu+1)\nu_{k,n}p)=\varphi(0)$ et $\varphi\left((2\mu+1)\nu_{k,n}\frac{p}{2}\right)=\varphi(0)$ ou $\varphi\left(\frac{p}{2}\right)$ suivant que $\nu_{k,n}$ est pair ou impair;

ceci entraîne

$$\sum{}'' = 2\left[\varphi(0) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right](c_n + \sum c_k), \tag{9}$$

la dernière somme étant étendue aux valeurs de $k$ pour lesquelles $k > n$ et $\nu_{k,n}$ est impair. On voit que le signe de chaque membre de $\sum''$ est le même que celui des membres de $\sum'$.

En considérant donc (7), (8) et (9), on obtient le résultat

$$|\Delta| = \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \left| \varphi\left(\frac{\mu}{\nu_{n,k}} p\right) + \varphi\left(\frac{\mu+1}{\nu_{n,k}} p\right) - 2\varphi\left(\frac{2\mu+1}{2\nu_{n,k}} p\right) \right| +$$
$$+ 2\left|\varphi(0) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right| (|c_n| + \sum |c_k|) \geqq$$
$$\geqq 2\left|\varphi(0) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right| |c_n| \geqq 2\lambda \cdot \frac{p}{\nu_n} \qquad (\mu = 0, \pm 1, \ldots; n = n_1, n_2, \ldots)$$

où $\lambda = \frac{\varrho}{p}\left|\varphi(0) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|$; puisque tout intervalle donné de la forme $(a-\delta, a+\delta)$ contient un segment $\left[\frac{\mu}{\nu_n} p, \frac{\mu+1}{\nu_n} p\right]$ ($\mu$ entier, $n = n_1, n_2, \ldots$) avec $a \in \left[\frac{\mu}{\nu_n} p, \frac{\mu+1}{\nu_n} p\right]$ pourvu que $n$ est assez grand, l'application du lemme (cf. (2)) fournit immédiatement la non-dérivabilité de $\Phi(x)$ c. q. f. d.

**6.** Les considérations précédentes peuvent être complétées en certain sens si l'on envisage des fonctions qui satisfont à une condition de Lipschitz.

Théorème 5. *Soit $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}_H 1$ $(0 \leqq x \leqq p)$ et $\varphi(0) \neq \varphi\left(\frac{p}{2}\right)$. Le signe des $c_k$ soit arbitraire mais supposons que*

$$\varliminf_{n\to\infty} \left(\nu_n \sigma_n - A_\varphi \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \nu_k\right) > 0, \tag{10}$$

*où $A_\varphi = H\frac{p}{2}\left|\varphi(0) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|^{-1}$ et $\sigma_n = \left|\sum c_k\right|$, cette somme étant étendue aux indices $k \geqq n$ pour lesquels $\nu_{k,n}$ est impair.*[12])

---

12) Donc, en particulier, $\sigma_n = |c_n|$ ou $\sigma_n = \left|\sum_{k=n}^{\infty} c_k\right|$ selon que chacun des rapports $\nu_{k+1,k}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ est pair resp. impair. — Il est clair que, étant donnés les $c_k$ avec $\Sigma |c_k| < \infty$ et $\varepsilon > 0$ arbitrairement, on peut choisir $\nu_1, \nu_2, \ldots$ successivement de sorte que les inégalités $\nu_n \sigma_n > A_\varphi \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \nu_k + \varepsilon$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (entraînant (10)) soient remplies.

*Dans ces conditions, $\Phi(x)$ est p. c. n. d.*

Démonstration. Considérons trois points équidistants de la forme $\frac{\mu}{\nu_n}p, \frac{2\mu+1}{2\nu_n}p, \frac{\mu+1}{\nu_n}p$, $\mu$ désignant un entier. Avec les notations (7), (8) on a

$$\begin{aligned}(11)\qquad & \left|\sum{}'\right| \leqq \sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\left[\left|\varphi\left(\frac{\mu}{\nu_{n,k}}p\right)-\varphi\left(\frac{2\mu+1}{2\nu_{n,k}}p\right)\right|+\right.\\ & \left.+\left|\varphi\left(\frac{\mu+1}{\nu_{n,k}}p\right)-\varphi\left(\frac{2\mu+1}{2\nu_{n,k}}p\right)\right|\right] \leqq H\frac{p}{\nu_n}\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k;\end{aligned}$$

d'autre part, de même que ci-dessus, on obtient (cf. (9))

$$(12)\qquad \sum{}''=2\left[\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right]\sum c_k,$$

où $k$ parcourt les valeurs pour lesquelles $k \geqq n$ et $\nu_{k,n}$ est impair.

On aura donc pour $n$ assez grand

$$\begin{aligned}(13)\qquad & |\Delta| \geqq \left|\sum{}''\right|-\left|\sum{}'\right| \geqq 2\left|\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|\sigma_n - H\frac{p}{\nu_n}\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k =\\ & =\frac{2}{\nu_n}\left|\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|\left(\nu_n\sigma_n - A_\varphi\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k\right) > 2\lambda\cdot\frac{p}{\nu_n},\end{aligned}$$

où $\lambda=\frac{\vartheta}{2p}\left|\varphi(0)-\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|$, $\vartheta>0$ désignant la limite inférieure (10).

Tout point $a$ peut être recouvert par un segment de la forme $\left[\frac{\mu}{\nu_n}p, \frac{\mu+1}{\nu_n}p\right]$ ($\mu=0, \pm 1, \ldots; n=1, 2, \ldots$), la longueur de ce segment tendant vers 0 pour $n\to\infty$. En vertu de (13) (cf. (2)) et du lemme on obtient que $\Phi(x)$ n'admet pas de dérivée en $a$, c. q. f. d.

Pour le cas où $\varphi\left(\frac{p}{2}\right)$ est égal à $\varphi(0)$ et $\varphi(p)$ (par exemple, où $\varphi(x)= =\sin x$), on peut énoncer le

Théorème 6. *Soit $\varphi(x)\in \mathrm{Lip}_H 1$ $(0\leqq x\leqq p)$ et $\varphi(0)=\varphi\left(\frac{p}{2}\right)\mp\varphi\left(\pm\frac{p}{4}\right)$. Supposons que l'une ou l'autre des conditions suivantes est vérifiée: les rapports $\nu_{k+1,k}$ sont pairs (cas I), de la forme $4r+1$ (cas II), resp. de la forme $4r-1$ (cas III) pour $k$ assez grand. En outre, soit*

$$(14)\qquad \varliminf_{n\to\infty}\left(\nu_n\tau_n - B_\varphi\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k\right)>0,$$

*où, en désignant* $\left\{\begin{matrix} u_\varphi \\ U_\varphi \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \min \\ \max \end{matrix}\right\} \left|\varphi(0)-\varphi\left(\pm\frac{p}{4}\right)\right|$, *nous posons* $B_\varphi = H\frac{p}{4}u_\varphi^{-1}$ *et* $\tau_n = |c_n|$ *ou* $\tau_n = \left|\sum_{k=n}^{\infty} c_k\right|$ *ou* $\tau_n = \left|\sum_{l=0}^{\infty} c_{n+2l}\right| - \frac{U_\varphi}{u_\varphi}\left|\sum_{l=0}^{\infty} c_{n+2l+1}\right|$, *selon les cas I, II ou III.*

*Dans ces conditions, $\Phi(x)$ est p. c. n. d.*

Démonstration. Nous écrivons $\frac{p}{2}=q$ et envisageons les points $\frac{\mu}{\nu_n}q$, $\frac{2\mu+1}{2\nu_n}q$, $\frac{\mu+1}{\nu_n}q$ $(\mu=0, \pm 1, \ldots; n=1, 2, \ldots)$. En adoptant les notations employées ci-dessus avec $q$ au lieu de $p$, on trouve tout d'abord

$$|\Sigma'| \leqq H\frac{q}{\nu_n}\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k. \tag{15}$$

Puisqu'on a $\varphi(\mu\nu_{k,n}q) = \varphi((\mu+1)\nu_{k,n}q) = \varphi(0)$ et $\varphi\left((2\mu+1)\nu_{k,n}\frac{q}{2}\right) = \varphi(0)$, $\varphi\left((2\mu+1)\frac{q}{2}\right)$ ou $\varphi\left(-(2\mu+1)\frac{q}{2}\right)$ suivant que $\nu_{k,n}\equiv 0 \pmod 2$, $\nu_{k,n}\equiv 1$ ou $-1 \pmod 4$, il résulte pour l'autre somme en question

$$\Sigma'' = \begin{cases} 2c_n\left[\varphi(0)-\varphi\left((2\mu+1)\frac{q}{2}\right)\right] & \text{(I)}, \\ 2\left[\varphi(0)-\varphi\left((2\mu+1)\frac{q}{2}\right)\right]\sum_{k=n}^{\infty} c_k & \text{(II)}, \\ 2\left[\varphi(0)-\varphi\left((2\mu+1)\frac{q}{2}\right)\right](c_n+c_{n+2}+\cdots)+ & \\ \qquad +2\left[\varphi(0)-\varphi\left(-(2\mu+1)\frac{q}{2}\right)\right](c_{n+1}+c_{n+3}+\cdots) & \text{(III)}, \end{cases} \tag{16}$$

suivant les trois cas, pourvu que $n$ soit supérieur à un entier positif convenable.

Il s'ensuit de (14), pour $n$ assez grand,

$$|\Delta| \geqq |\Sigma''| - |\Sigma'| \geqq 2\frac{u_\varphi}{\nu_n}\left(\nu_n\tau_n - B_\varphi\sum_{k=0}^{n-1}\nu_k|c_k|\right) > 2\lambda\cdot\frac{q}{\nu_n}, \tag{17}$$

où $\lambda = \frac{u_\varphi}{2q}\theta$, $\theta>0$ désignant la limite inférieure (14), avec la signification donnée de $\tau_n$ et $B_\varphi$; de là on complète la démonstration comme plus haut (cf. (13)).

Si $\{c_k\}$ et $\{\nu_k\}$ sont des *progressions géométriques*, c'est-à-dire $c_k = c^k$ $(0 < |c| < 1)$, $\nu_k = \nu^k$ $(k = 0, 1, \ldots)$, les conditions des théorèmes 5 et 6 peuvent être écrites d'une façon plus simple.

En effet, si nous faisons usage des expressions fermées

$$\sum_{k=0}^{n-1} \nu_k |c_k| = \frac{(\nu|c|)^n - 1}{\nu|c| - 1}, \quad \sum_{k=n}^{\infty} c_k = \frac{c^n}{1-c}, \quad \sum_{l=0}^{\infty} c_{n+2l} = \frac{c^n}{1-c^2}, \quad \sum_{l=0}^{\infty} c_{n+2l-1} = \frac{c^{n+1}}{1-c^2},$$

il résulte aisément comme corollaire le

Théorème 7. *Soient* $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}_H 1$ $(0 \leqq x \leqq p)$, $0 < |c| < 1$ *et* $\nu$ *un entier supérieur à* 1.

1) *Si* $\varphi(0) \neq \varphi\left(\frac{p}{2}\right)$, *nous supposons encore que* $\nu|c| \geqq 1 + A_\varphi$ *ou* $1 + A_\varphi \cdot (1-c)$ *avec* $A_\varphi = H \frac{p}{2} \left|\varphi(0) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|^{-1}$, *suivant que* $\nu$ *est pair ou impair.*

2) *Si* $\varphi(0) = \varphi\left(\frac{p}{2}\right) \neq \varphi\left(\pm \frac{p}{4}\right)$ *nous supposons que* $\nu|c| \geqq 1 + B_\varphi$ *pour* $\nu$ *pair,* $\nu|c| \geqq 1 + B_\varphi$ $(1-c)$ *pour* $\nu \equiv 1$ (mod 4), *enfin* $\nu|c| \geqq 1 + B_\varphi$ $(1-c^2)$ $(1 - \Theta_\varphi |c|)^{-1}$ *pour* $\nu \equiv -1$ (mod 4) *où* $B_\varphi = H \frac{p}{4} u_\varphi^{-1}$, $\Theta_\varphi = U_\varphi u_\varphi^{-1}$ *avec* $\begin{Bmatrix} u_\varphi \\ U_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \min \\ \max \end{Bmatrix} \left|\varphi(0) - \varphi\left(\pm \frac{p}{4}\right)\right|$.

*Dans ces conditions, la série* $\sum_{k=0}^{\infty} c^k \varphi(\nu^k x)$ *représente une fonction partout continue, non dérivable.*

**7.** Comparons nos théorèmes à quelques exemples remarquables de la littérature.

Soit $\varphi(x) = ((x))$, $c_k = c^k$ $(0 < c < 1)$, $\nu_k = \nu^k$ $(\nu > 1$, entier). L'application du théorème 3 fournit alors: $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c^k((\nu^k x))$ est p. c. n. d. pourvu que $c\nu \geqq 1$. — Cet exemple a été donné par KNOPP [12], avec la restriction $c\nu > 4$; le plus important cas particulier est sans doute $c\nu = 1$, celui de l'exemple de VAN DER WAERDEN [21]. — De même, pour $\varphi(x) = ((x))$, $c_k = 10^{-k}$, $\nu_k = 2^{k!}$ s'obtient l'exemple de FABER [7]; pour $\varphi(x) = |\sin \pi x|$, $c_k = c^k$ $(0 < c < 1)$, $\nu_k = \nu^k$ $(\nu > 1)$ le résultat: $\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k |\sin \nu^k \pi x|$ est p. c. n. d. si $c\nu \geqq 1$. Ce dernier se trouve aussi chez KNOPP, mais seulement pour $c\nu > 1 + \frac{3}{2}\pi \approx 5{,}71$.

Soit $\varphi(x)=\cos\pi x$, $p=2$, $H=\pi$, donc $A_\varphi=\frac{\pi}{2}$ au théorème 7. Il s'ensuit que $\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c^k\cos\nu^k\pi x$ est p. c. n. d. pour $0<|c|<1$, $\nu$ entier, $\nu>1$ et $\nu|c|\geqq 1+\frac{\pi}{2}$ ou $1+\frac{\pi}{2}(1-c)$ selon que $\nu$ est pair ou impair. $\left(\nu c\geqq 1+\frac{\pi}{2}\approx 2{,}57\right.$ est donc convenable pour $c>0$ et tous les $\nu$ en question.$\left.\right)$ C'est l'exemple de WEIERSTRASS [22], mais ses conditions pour $c$ et $\nu$ sont: $0<c<1$, $\nu$ impair, $\nu c>1+\frac{3}{2}\pi\approx 5{,}71$. — En posant $\varphi(x)=\sin\pi x, p=2$, $H=\pi$, $u_\varphi=U_\varphi=\Theta_\varphi=1$, $B_\varphi=\frac{\pi}{2}$, il résulte: $\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c^k\sin\nu^k\pi x$ est p. c. n. d. pour $0<|c|<1$, $\nu$ entier $>1$ et $\nu|c|\geqq 1+\frac{\pi}{2}$ ou $1+\frac{\pi}{2}(1-c)$ ou $1+\frac{\pi}{2}(1+|c|)$ suivant que l'on a $\nu\equiv 0 \pmod 2$ ou $\nu\equiv 1 \pmod 4$ ou $\nu\equiv -1$ (mod 4). (La condition $\nu|c|\geqq 1+\pi$ est donc suffisante pour chaque $c$ et $\nu$ en question.) C'est une exemple de DINI [5] et KNOPP, discuté sous les conditions $0<|c|<1$, $\nu$ pair ou $\equiv \operatorname{sgn} c \pmod 4$ et $\nu|c|>1+\frac{3}{2}\pi$. — En désignant par $\chi(x)$ la fonction impaire et de période 2 pour laquelle $\chi(x)=$ $=((x))$ $(0\leqq x\leqq 1)$, on peut conclure de même à ce que $\sum_{k=0}^{\infty}c^k\chi(\nu^k x)$ représente une fonction p. c. n. d. dans les restrictions données pour $c$ et $\nu$ en cas de $\varphi(x)=\sin\pi x$, mais avec 1 au lieu de $\pi$; cette série se trouve aussi dans l'ouvrage cité de KNOPP avec $0<|c|<1$, $\nu$ pair ou $\equiv\operatorname{sgn} c \pmod 4$ et $\nu|c|>4$.

Bien entendu, les théorèmes précédents fournissent un nombre arbitraire d'exemples analogues; les plus simples s'obtiennent en choisissant pour $\varphi(x)$ une fonction linéaire par segments resp. une fonction définie par des arcs de cercle ou de parabole etc.

**8.** ZYGMUND s'occupe dans un ouvrage récent[13]) des fonctions $f(x)$ telles que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h}=0 \tag{18}$$

en un point $x_0$ resp. uniformément dans un intervalle („smooth functions");

13) [23].

il donne ainsi le premier étude systématique d'une classe de fonctions qui a été employée depuis RIEMANN dans la théorie des séries trigonométriques, et il montre par des résultats nombreux que ces fonctions jouent un rôle essentiel dans l'analyse réelle. Puisqu'il s'agit évidemment d'une généralisation de la dérivabilité, nous jugeons digne de remarquer qu'aucune des fonctions non dérivables construites plus haut ne possède la propriété (18) uniformément sur aucun segment; ceci peut être vérifié immédiatement par comparaison de (18) et (2).

En outre, les résultats profonds de HARDY[14]) sur la fonction de WEIERSTRASS montrent que les conditions pour $c_k, \nu_k$ des théorèmes 5, 6 puissent être améliorées dans certains cas particuliers. D'autre part, il semble que la condition 3) du théorème 4 (en particulier, $|c|\nu \geqq 1$ pour $c_k = c^k, \nu_k = \nu^k$) est indispensable. J'espère de revenir à ces problèmes (comme à la considération des nombres de DINI pour les fonctions en question) à une autre occasion.

## Ouvrages cités.


[1] F. A. BEHREND, Some remarks on the construction of continuous non-differentiable functions, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **50** (1949), 463—481.

[2] A. S. BESICOVITCH, Diskussion der stetigen Funktionen in Zusammenhang mit der Frage über ihre Differenzierbarkeit, *Bull. Acad. Sci. URSS*, Leningrad, (6) **19** (1925), 527—540.

[3] K. A. BUSH, Continuous functions without derivatives, *Amer. Math. Monthly*, **59** (1952), 222—225.

[4] J. DIEUDONNÉ, Sur une fonction continue sans dérivée, *Mathesis*, **47** (1933), 277—279.

[5] U. DINI, Su alcuni funzioni che in tutto in intervallo non hanno mai derivata, *Annali di Mat.*, (2) **8** (1877), 121—137.

[6] P. DU BOIS-REYMOND, Versuch einer Klassifikation der willkürlichen Funktionen reeller Argumente, *Journal für Math.*, **79** (1875), 21—37.

[7] G. FABER, Einfaches Beispiel einer stetigen nirgends differenzierbaren Funktion, *Jahresber. d. Deutschen Math. Verein.*, **16** (1907), 538—540.

[8] H. HAHN, Über stetige Funktionen ohne Ableitung, *Jahresber. d. Deutschen Math. Verein.*, **26** (1918), 281—284.

[9] G. H. HARDY, Weierstrass' non-differentiable function, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **17** (1916), 301—325.

[10] T. H. HILDEBRANDT, A simple continuous function with a finite derivative at no point, *Amer. Math. Monthly*, **40** (1933), 547—548.


[14]) Dans l'ouvrage [9], il est démontré par ex. que les séries $\sum a^n \cos b^n \pi x$ et $\sum a^n \sin b^n \pi x$ représentent des fonctions p. c. n. d., si $0 < a < 1$, $b > 1$ et $ab \geqq 1$; la fonction riemannienne $\sum n^{-2} \sin n^2 \pi x$ est trouvée non dérivable pour toute valeur irrationnelle de $x$.

[11] J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta Math.*, **30** (1906), 175—193.

[12] K. Knopp, Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen, *Math. Zeitschrift*, **2** (1918), 1—26.

[13] H. Lebesgue, Une fonction continue sans dérivé, *Enseign. Math.*, **38** (1942), 212—213.

[14] B. N. Mukhopadhyay, On some generalisations of Weierstrass' non-differentiable functions, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **25** (1934), 179—184.

[15] W. Orlicz, Sur les fonctions continues non dérivables, *Fund. Math.*, **34** (1947), 45—60.

[16] E. D. Pepper, On continuous functions without a derivative, *Fund. Math.*, **12** (1928). 244—253.

[17] S. Saks, On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions, *Fund. Math.*, **19** (1932), 211—219.

[18] A. N. Singh, The theory and construction of non-differentiable functions, *Lucknow Univ. Studies*, N°1 (Lucknow, 1935).

[19] T. Takagi, A simple example of continuous function without derivative, *Journal Phys.-Math. Soc. Tokyo*, **1** (1903), 176—177.

[20] R. Tambs Lyche, Une fonction continue sans dérivée, *Enseign. Math.*, **38** (1942), 208—211.

[21] B. L. van der Waerden, Ein einfaches Beispiel einer nichtdifferenzierbaren stetigen Funktion, *Math. Zeitschrift*, **32** (1930), 474–475.

[22] K. Weierstrass, Über kontinuierliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Wert des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen, *Werke*, **2**, 71—74.

[23] A. Zygmund, Smooth functions, *Duke Math. Journal*, **12** (1945), 47—76.

*(Reçu le 29 février 1956)*

# On a theorem of Löwner and its connections with resolvents of selfadjoint transformations.

By A. KORÁNYI in Szeged.

In his paper [4] LÖWNER characterized the class $C_M$ of monotone matrix functions of arbitrarily high finite order, i. e. functions for wich $A \geqq B$ implies $f(A) \geqq f(B)$ for any two finite hermitian matrices $A, B$ of the same order and with spectra in $(-1, 1)$.[1]). These functions are at the same time monotone operator functions in Hilbert space, i. e. $f(A) \geqq f(B)$ is implied by $A \geqq B$ for any two selfadjoint operators $A, B$ with spectra in $(-1, 1)$ (see [2]).

LÖWNER first proved by some relatively simple ingenious considerations that $C_M$ is identical with the class $C_P$ of real-valued functions $f(x)$, which are continuously derivable in the interval $(-1, 1)$ and satisfy the inequality

(1) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k(x_j, x_i)\,\alpha_i\bar{\alpha}_j \geqq 0$$

with

$$k(x, x) = f'(x), \quad k(x, y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \quad (x \neq y)$$

for any finite system of points $x_1, \ldots, x_n$ in $(-1, 1)$ and complex numbers $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

The problem of the explicit characterization of the class $C_P$ has also been solved by LÖWNER. Using his deep results on interpolation by monotone matrix functions he proved that $C_P$ is identical with the class $C_A$ of functions analytic in $(-1, 1)$, which can be continued analytically onto the entire upper half-plane and have there a non-negative imaginary part.

This problem has also been solved by BENDAT and SHERMAN [2] in an other, more direct way. Departing from a transformation of condition (1) and making use of a theorem of S. BERNSTEIN and the Hamburger moment prob-

---

[1]) Throughout this paper the restriction to the interval $(-1, 1)$ is unessential. All results can easily be transformed to the case of an arbitrary open interval $(a, b)$.

lem they proved that $C_P$ is identical with the class $C_I$ of functions representable in the integral form

$$f(x)=f(0)+\int_{-1}^{1}\frac{x}{1-tx}\,d\mu(t) \tag{2}$$

with a bounded non-decreasing $\mu(t)$. It is known, however, that $C_I=C_A$.[2])

It was also essentially the same problem that has been solved by WIGNER and NEUMANN [7] in connection with the quantum theory of collisions. Their method rests on function-theoretic arguments and continued fraction expansions.

In section 1 of this paper we shall give a new, perhaps simpler proof of $C_P=C_I$, based on considerations of geometrical nature in Hilbert space. Our method parts from an idea applied by GELFAND and RAIKOV, and GODEMENT in the representation theory of locally compact abelian groups and developed in an abstract form by ARONSZAJN [1]. The result $C_P\subseteq C_A$ will be obtained in a quite elementary way, and a simple use of the spectral theorem will furnish the relation $C_P=C_I$.

In section 2 we show that our method of proof yields also a more general result on operators in Hilbert space. Namely, we shall obtain a necessary and sufficient condition that a bounded symmetric operator $T_x$ depending on a real parameter $x$ be the projection of the resolvent of a self-adjoint operator defined in a wider Hilbert space.

I wish to express my sincere gratitude to professor BÉLA SZ.-NAGY for his kind interest in this work and for his valuable suggestions.

**1.** Theorem 1. *Let $f(x)$ be continuously derivable in $(-1,1)$, and suppose that* (1) *holds for any system $x_1,\dots,x_n\in(-1,1)$ and any $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Then $f(x)$ admits of a representation* (2) *with a bounded non-decreasing $\mu(t)$. Conversely, every function of the form* (2) *satisfies condition* (1).

Proof. Consider the set $\mathfrak{H}_1$ of functions representable in the form $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i k(x,y_i)$ $(y_i\in(-1,1))$. $\mathfrak{H}_1$ is evidently a linear set. Now define the inner product of the elements $\varphi(x)$ and $\psi(x)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j k(x,z_j)$ by

$$(\varphi(x),\psi(x))=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}k(z_j,y_i)\,\alpha_i\bar{\beta}_j=\sum_{j=1}^{m}\varphi(z_j)\,\bar{\beta}_j=\sum_{j=1}^{n}\overline{\psi(y_i)}\,\alpha_i. \tag{3}$$

[2]) For a simple proof of this fact see [3].

From the evident relations $k(x,y)=k(y,x)$ and (3) it is seen that the inner product does not depend on the special representation of $\varphi(x)$ and $\psi(x)$, and it is easily verified that this definition has the usual properties of the inner product. So we have made $\mathfrak{H}_1$ a (not necessarily complete) Hilbert space. Let $\mathfrak{H}$ be the closure of $\mathfrak{H}_1$.

Now define an operator $A_1$ in $\mathfrak{H}$, first for the elements of the form $k(x,y)$ with $y \neq 0$ (as a function of $x$) by

$$A_1 k(x,y) = \frac{1}{y}[k(x,y)-k(x,0)].$$

For any two elements $k(x,y)$, $k(x,z)$ $(y, z \neq 0)$ we have

$$(4)\quad (A_1 k(x,y), k(x,z)) = \left(\frac{1}{y}[k(x,y)-k(x,0)], k(x,z)\right) = \frac{1}{y}[k(z,y)-k(z,0)] =$$

$$= \frac{1}{y}\left[\frac{f(y)-f(z)}{y-z} - \frac{f(z)-f(0)}{z}\right] = \frac{zf(y)-yf(z)-(y-z)f(0)}{y(y-z)z} =$$

$$= \frac{1}{z}\left[\frac{f(y)-f(z)}{y-z} - \frac{f(y)-f(0)}{y}\right] = \frac{1}{z}[k(z,y)-k(0,y)] =$$

$$= \left(k(x,y), \frac{1}{z}[k(x,z)-k(x,0)]\right) = (k(x,y), A_1 k(x,z)).$$

(In this calculation we assumed $y \neq z$. In the case $y = z$, however, our result is trivial.) $A_1$ can now be defined for all linear combinations of the elements $k(x,y)$ $(y \neq 0)$ by linearity. $A_1$ is densely defined; to see this it suffices to notice that $k(x,0)$ can be represented as the limit of other $k(x,y)$. However, this is evident since

$$\lim_{y\to 0} \|k(x,y)-k(x,0)\|^2 = \lim_{y\to 0} \left(f'(y) - 2\frac{f(y)-f(0)}{y} + f'(0)\right) = 0$$

because of the continuity of $f'(x)$. We have still to show that $A_1$ is uniquely determined, i. e. that $\sum_i \alpha_i k(x,y_i) = 0$ implies $\sum_i \alpha_i A_1 k(x,y_i) = 0$. Now this follows from the equality

$$\left(\sum_i \alpha_i A_1 k(x,y_i), k(x,y)\right) = \sum_i \alpha_i (A_1 k(x,y_i), k(x,y)) =$$

$$= \sum_i \alpha_i (k(x,y_i), A_1 k(x,y)) = \left(\sum_i \alpha_i k(x,y_i), A_1 k(x,y)\right) = 0$$

whence $\sum_i \alpha_i A_1 k(x,y_i) = 0$ owing to the fact that the elements $k(x,y)$ $(y \neq 0)$ span $\mathfrak{H}$.

So $A_1$ is a densely defined symmetric linear operator in $\mathfrak{H}$. Evidently, $A_1$ is real with respect to the conjugation determined by

$$J\left(\sum_i \alpha_i k(x, y_i)\right) = \sum_i \bar{\alpha}_i k(x, y_i),$$

so it has a selfadjoint extension $A$.

We show that $(I-yA)^{-1}$ exists for all $y$ with $|y| < 1$. Since $I-yA$ is selfadjoint, we have to show only that the range of $I-yA$ is dense in $\mathfrak{H}$. Now, by

$$(I-yA)\,k(x, z) = k(x, z) - \frac{y}{z}[k(x, z) - k(x, 0)] = \left(1-\frac{y}{z}\right)k(x, z) + \frac{y}{z}\,k(x, 0)$$

$(z \neq 0)$, it follows that

$$k(x, 0) = (I-yA)\,k(x, y)$$

and

$$k(x, z) = \frac{1}{1-\frac{y}{z}}\left[(I-yA)\,k(x, z) - \frac{y}{z}\,k(x, 0)\right]$$

for $z \neq y$, thus $k(x, z)$ is in the range of $I-yA$ for all $z \neq y$. Now,

$$k(x, y) = \lim_{z \to y} k(x, z)$$

because of the continuity of $f'(x)$ and so our assertion is proved. Specially we have for $y \neq 0$

$$\frac{f(y)-f(0)}{y} = k(0, y) = (k(x, y), k(x, 0)) =$$

$$= \left((I-yA)^{-1}(I-yA)\,k(x, y), k(x, 0)\right) = \left((I-yA)^{-1}k(x, 0), k(x, 0)\right),$$

or, for any $y \in (-1, 1)$

(5) $$f(y) = f(0) + \left(y(I-yA)^{-1}k(x, 0), k(x, 0)\right).$$

From the spectral theorem of selfadjoint operators

$$f(y) = f(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{1-ty}\, d(E_t k(x, 0), k(x, 0)) = f(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{1-ty}\, d\mu(t).$$

To finish the proof we have only to show that $\mu(t)$ is constant outside $[-1, 1]$. For $|y| < 1$ we have

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1-ty)^2}\, d\mu(t) = \|(I-yA)^{-1}k(x, 0)\|^2 = \|k(x, y)\|^2 = k(y, y) = f'(y),$$

and so for $|x| > 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-t)^2} d\mu(t) = \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Whence, for any $|x| \geqq \omega (> 1)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-t)^2} d\mu(t) \leqq \max_{|y| \leqq \frac{1}{\omega}} f'(y) = M_\omega.$$

Let $\omega \leqq a < b$, $x = \dfrac{a+b}{2}$. Then

$$M_\omega \geqq \int_a^b \frac{1}{(x-t)^2} d\mu(t) \geqq \frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} \int_a^b d\mu(t) = \frac{4}{(b-a)^2} [\mu(t) - \mu(a)],$$

and

$$\frac{\mu(b) - \mu(a)}{b-a} \leqq \frac{b-a}{n} M_\omega.$$

It follows that $\mu'(t)$ exists for $t > \omega$ and $\mu'(t) = 0$. So $\mu(t)$ is constant for $t > \omega$, and since $\omega$ was arbitrary, $\omega > 1$, $\mu(t)$ is constant for $t > 1$. The same argument shows that $\mu(t)$ is constant also for $t < -1$.

The prove the converse of the theorem we notice that $f(x)$ being of the form (2) we have

(6) $$k(x, y) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-tx)(1-ty)} d\mu(t),$$

and so for any $x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k(x_j, x_i) \alpha_i, \bar{\alpha}_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-tx_j)(1-tx_i)} d\mu(t) \alpha_i \bar{\alpha}_j =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-tx_i} \right)^2 d\mu(t) \geqq 0.$$

R e m a r k. The assertion $C_P \subseteqq C_A$ can be read immediately from the proof, without using the spectral theorem. The representation (5) shows that $f(y)$ has an analytic continuation $f(z)$ onto the upper half-plane, and putting $(I - zA)^{-1} k(x, 0) = v$ we have

$$\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} (v, (I - zA) v) = \operatorname{Im} z [(v, v) - \bar{z}(Av, v)] = \operatorname{Im} z \|v\|^2,$$

and so $\operatorname{Im} f(z) \geqq 0$ if $\operatorname{Im} z \geqq 0$.

**2.** In this section we wish to characterize the functions $T_x$, the values of which are bounded operators in a Hilbert space $\mathfrak{H}$, which can be represented as projections $\tilde{P}\tilde{R}_x$ onto $\mathfrak{H}$ of the resolvent of a bounded selfadjoint operator defined in a wider Hilbert space $\tilde{\mathfrak{H}}$.[3]) It will be seen that theorem 1 is a special case of theorem 2. For the sake of convenience we shall consider the "resolvent" of $A$ as defined by $Q_x = x(I - xA)^{-1}$ instead of the usually defined resolvent $R_x = (A - xI)^{-1}$. We have evidently the simple relation $Q_x = -R_{\frac{1}{x}}$.

Theorem 2. *In order that the bounded symmetric operator $T_x$ defined in $\mathfrak{H}$ for $-1 < x < 1$ be the projection $\tilde{P}\tilde{Q}_x$ of the resolvent of a selfadjoint operator $\tilde{A}$, $\|\tilde{A}\| \leqq 1$, in a wider Hilbert space $\tilde{\mathfrak{H}} \supseteqq \mathfrak{H}$, the following conditions are necessary and sufficient:*

*a) $T_x$ admits of a weakly continuous weak derivative $T'_x$,*[4])

*b) $T_0 = O$, $T'_0 = I$,*

*c) for any finite system of points $x_i \in (-1, 1)$ and elements $f_i \in \mathfrak{H}$*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (K(x_j, x_i) f_i, f_j) \geqq 0,$$

*with* $K(x, x) = T'_x$, $K(x, y) = \dfrac{T_x - T_y}{x - y}$ $(x \neq y)$.

Proof. In the proof of the necessity we use the relation

$$\tilde{Q}_x - \tilde{Q}_y = (x - y)(\tilde{I} - x\tilde{A})^{-1}(\tilde{I} - y\tilde{A})^{-1},$$

which is essentially the Hilbert functional equation of the resolvent. The necessity of conditions a), b) can easily be seen from this (and is also well known). To see the necessity of c) let $\tilde{K}(x, y)$ be the kernel operator built from $\tilde{Q}_x$ instead of $T_x$; then it follows from $T_x = \tilde{P}\tilde{Q}_x$ that

$$\sum_i \sum_j (K(x_j, x_i) f_i, f_j) = \sum_i \sum_j (\tilde{P}\tilde{K}(x_j, x_i) f_i, f_j) = \sum_i \sum_j (\tilde{K}(x_j, x_i) f_i, f_j) =$$
$$= \sum_i \sum_j ((\tilde{I} - x_j\tilde{A})^{-1} (\tilde{I} - x_i\tilde{A})^{-1} f_i, f_j) = \|\sum_i (\tilde{I} - x_i\tilde{A})^{-1} f_i\|^2 \geqq 0.$$

For the proof of the sufficiency we construct the space $\tilde{\mathfrak{H}}$. We consider the set $\tilde{\mathfrak{H}}_1$ of functions defined for $-1 < x < 1$ and taking their values in $\mathfrak{H}$, representable in the form $f(x) = \sum_{i=1}^{n} K(x, y_i) f_i$. The inner product of $f(x)$ and

3) This terminology has been introduced in [6]. In this case it means simply that $T_x f = \tilde{P}\tilde{Q}_x f$ for any $f \in \mathfrak{H}$.

4) I. e. $(T_x f, g)$ has a continuous derivative with respect to $x$ for any fixed $f, g$.

$g(x) = \sum_{j=1}^{m} K(x, z_j) g_j$ will be

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (K(z_j, y_i) f_i, g_j).$$

It is seen in the same way as above, for (3), that this is a legitimate definition, and the set $\tilde{\mathfrak{H}}_1$ can be completed to a complete Hilbert space $\tilde{\mathfrak{H}}$.

Owing to the equalities

$$c\, K(x, 0) f = K(x, 0)\, c f, \quad K(x, 0)(f_1 + f_2) = K(x, 0) f_1 + K(x, 0) f_2,$$
$$\langle K(x, 0) f, K(x, 0) g \rangle = (K(0, 0) f, g) = (f, g)$$

$\mathfrak{H}$ can be imbedded into $\tilde{\mathfrak{H}}$ with the identification $f \sim K(x, 0) f$.[5])

We shall need the projection $\tilde{P}$ of an element $K(x, y) f$ onto $\mathfrak{H}$. For every $h \in \mathfrak{H}$ we have

$$\langle \tilde{P} K(x, y) f, h \rangle = \langle K(x, y) f, K(x, 0) h \rangle = (K(0, y) f, h),$$

therefore

$$\tilde{P} K(x, y) f = K(0, y) f.$$

We define the operator $\tilde{A}_1$ in $\tilde{\mathfrak{H}}$ for the elements $K(x, y) f$ $(y \neq 0)$ by

$$\tilde{A}_1 K(x, y) f = \frac{1}{y} [K(x, y) f - K(x, 0) f].$$

The property

$$\langle \tilde{A}_1 K(x, y) f, \ K(x, z) g \rangle = \langle K(x, y) f, \ \tilde{A}_1 K(x, z) g \rangle$$

can be seen in the same way as on p. 65 and $\tilde{A}_1$ can be continued for all linear combinations of the $K(x, y) f$. The fact that these combinations are dense in $\tilde{\mathfrak{H}}$ follows from

$$\lim_{y \to 0} \| K(x, y) f - K(x, 0) f \|^2 = \lim_{y \to 0} \left[ (T_y' f, f) - 2 \left( \frac{T_y}{y} f, f \right) + (f, f) \right] = 0$$

by conditions a), b). Introducing a conjugation $J$[6]) in $\mathfrak{H}$, $\tilde{A}_1$ is seen to be a real operator with respect to the conjugation determined by $\tilde{J} \sum K(x, y_i) f_i = \sum K(x, y_i) J f_i$, so it has a selfadjoint extension $\tilde{A}$. Analogously to the proof of theorem 1 it can also be seen that $(\tilde{I} - y\tilde{A})^{-1}$ exists if $|y| < 1$.

For every $y \neq 0$ we have

(7) $$(\tilde{I} - y \tilde{A})^{-1} K(x, 0) f = K(x, y) f,$$

---

[5]) These considerations are analogous to those in [6] for operator functions on *-semigroups.

[6]) See [5] p. 40—41. We may define $J$ as follows. Let $\{\varphi_\alpha\}$ be any complete orthonormal set in $\mathfrak{H}$. Then put, for any $f \in \mathfrak{H}$, $Jf = \sum_\alpha (\varphi_\alpha, f) \varphi_\alpha$.

and so

$$K(0, y)f = \tilde{P}K(x, y)f = \tilde{P}(\tilde{I} - y\tilde{A})^{-1}K(x, 0)f = \tilde{P}(\tilde{I} - y\tilde{A})^{-1}f$$

i. e.

$$\frac{T_y}{y}f = \tilde{P}(\tilde{I} - y\tilde{A})^{-1}f$$

for any $f \in \mathfrak{H}$. Multiplying by $y$ we have $T_y = \tilde{P}\tilde{Q}_y f$ for any $f \in \mathfrak{H}$; and this equality holds evidently also for $y = 0$.

It remains to prove that $\tilde{A}$ is bounded, with $\|\tilde{A}\| \leqq 1$. Denote the resolution of the identity belonging to $\tilde{A}$ by $\tilde{E}_t$. For any $f \in \mathfrak{H}$ we have

$$(T_y f, f) = (\tilde{P}y(\tilde{I} - y\tilde{A})^{-1}f, f) = (y(\tilde{I} - y\tilde{A})^{-1}f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{1 - ty}\, d(\tilde{E}_t f, f);$$

and we conclude, in the same way as in the case of Theorem 1 that $(\tilde{E}_t f, f)$ is constant outside $[-1, 1]$. Now, $\tilde{\mathfrak{H}}$ is minimal in the sense that the elements $\tilde{E}_t f$ $(f \in \mathfrak{H})$ span $\tilde{\mathfrak{H}}$, as it can be seen immediately from (7):

$$K(x, y)f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - ty}\, d\tilde{E}_t f \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

By a known argument (see [6], p. 4—5) it follows then that $\tilde{E}_t$ is constant outside $[-1, 1]$, thus proving our assertion.

## Bibliography.


[1] N. Aronszajn, La théorie des noyaux reproduisants et ses applications, *Proceedings Cambridge Phil. Soc.*, 39 (1943), 133—153.

[2] J. Bendat and S. Sherman, Monotone and convex operator functions, *Transactions Amer. Math. Soc.*, 79 (1955), 58—71.

[3] A. Korányi, Note on the theory of monotone operator functions, *these Acta*, 16 (1955). 241—245.

[4] K. Löwner, Über monotone Matrixfunktionen, *Math. Zeitschrift*, 38 (1934), 177—216.

[5] B. Sz.-Nagy, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes* (Berlin, 1942).

[6] B. Sz.-Nagy, *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace.* Appendice au livre "Leçons d'analyse fonctionnelle" par F. Riesz et B. Sz.-Nagy (Budapest, 1955).

[7] E. P. Wigner and J. v. Neumann, Significance of Löwner's theorem in the quantum theory of collisions, *Annals of Math.*, 59 (1954), 418—433.


*(Received May 1, 1956.)*

# Remarks to the preceding paper of A. Korányi.*)

By BÉLA SZ.-NAGY in Szeged.

**1.** Theorem 1 of the cited paper may be generalized as follows:

Theorem A. *Let $f(x)$ be a real-valued, continuous function on $(-1, 1)$, derivable on a subset $S$ of full measure, including the point $x=0$. Suppose that the function $k(x, y)$, defined on $S \times S$ by the formulas*

$$k(x, y)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \textit{if} \quad y \neq x, \quad \textit{and} \quad k(x, x)=f'(x),$$

*be positively definite, i. e.*

$$\sum_i \sum_j k(x_j, x_i)\, \alpha_i \bar{\alpha}_j \geqq 0 \tag{1}$$

*holds for any finite system of points $x_1, \ldots, x_n \in S$, and any complex $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Then $f(x)$ may be represented in the form*

$$f(x)=f(0)+\int_{-1-0}^{1} \frac{x}{1-xt}\, dm(t) \tag{2}$$

*with a bounded non-decreasing, right-continuous function $m(t)$.*

The cited theorem settles the same fact under the more restringent condition that $f(x)$ is continuously derivable throughout $(-1, 1)$. We may reduce, however, the above more general case to this particular one.

Let $\varepsilon>0$. If $x_1, \ldots, x_n$ are any given points in $(-1, 1)$, the points

$$x_i(t)=(1+\varepsilon)^{-1}(x_i+t) \qquad (i=1, \ldots, n)$$

belong to $S$ for almost every value of the parameter $t$ with $|t|<\varepsilon$. This follows readily from the fact that $S$ is of full measure. Thus, for almost all $t$ in $(-\varepsilon, \varepsilon)$, and any complex $\alpha_i$, we have

$$\sum_i \sum_j k(x_j(t), x_i(t))\, \alpha_i \bar{\alpha}_j \geqq 0,$$

*) A. Korányi, On a theorem of Löwner and its connections with resolvents of selfadjoint transformations, *these Acta*, **17** (1956), 63—70.

and consequently

$$\sum_i \sum_j \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} k(x_j(t), x_i(t))\, dt \cdot \alpha_i \bar{\alpha}_j \geqq 0. \tag{3}$$

Put

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f\left(\frac{x+t}{1+\varepsilon}\right) dt = \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} \int_{\frac{x-\varepsilon}{1+\varepsilon}}^{\frac{x+\varepsilon}{1+\varepsilon}} f(\tau)\, d\tau \qquad (-1 < x < 1);$$

the corresponding kernel function $k_\varepsilon(x, y)$ is obviously equal to

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} k\left(\frac{x+t}{1+\varepsilon}, \frac{y+t}{1+\varepsilon}\right) dt;$$

thus, by (3)

$$\sum_i \sum_j k_\varepsilon(x_j, x_i)\, \alpha_i \bar{\alpha}_j \geqq 0.$$

Now, the function $f_\varepsilon(x)$ is continuously derivable throughout $(-1, 1)$:

$$f'_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \left[ f\left(\frac{x+\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) - f\left(\frac{x-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) \right], \tag{4}$$

and we are in the particular case considered by KORÁNYI. Thus $f_\varepsilon(x)$ may be represented in the form

$$f_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(0) + \int_{-1-0}^{1} \frac{x}{1-xt}\, dm_\varepsilon(t) \tag{5}$$

with a non-decreasing bounded, right-continuous $m_\varepsilon(t)$ with $m_\varepsilon(-1-0) = 0$. By (5) we have

$$f'_\varepsilon(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \int_{-1-0}^{1} \frac{1}{1-xt}\, dm_\varepsilon(t) = \int_{-1-0}^{1} dm_\varepsilon(t) = m_\varepsilon(1),$$

and by (4)

$$f'_\varepsilon(0) \to f'(0) \quad \text{for} \quad \varepsilon \to 0.$$

Thus $m_\varepsilon(1) \to f'(0)$ as $\varepsilon \to 0$, and so we may apply the theorem of HELLY: there exists a non-decreasing, right-continuous function $m(t)$ with $m(-1-0) = 0$, $m(1) = f'(0)$, such that

$$\int_{-1-0}^{1} g(t)\, dm_{\varepsilon_n}(t) \to \int_{-1-0}^{1} g(t)\, dm(t)$$

for a conveniently chosen sequence $\varepsilon_n \to 0$ and for all continuous $g(t)$, in particular for

$$g(t) = g_x(t) = \frac{x}{1-xt}, \qquad |x| < 1.$$

On the other hand, we have $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x) = f(x)$ by the continuity of $f(x)$, and so the relation (2) results from (5) for $\varepsilon = \varepsilon_n \to 0$.

**2.** Our second remark concerns theorem 2 of the cited paper, on operator valued functions. We generalize it in two directions: we drop, as in the preceding theorem, the hypothesis that the derivative be continuous, and we replace the hypothesis that the kernel function be positive definite by a weaker one ("weak positive definiteness").

Theorem B. *Let $F(x)$ be a function defined on $(-1, 1)$, whose values are bounded symmetric operators on Hilbert space $\mathfrak{H}$. Suppose that*

a) *$F(x)$ is weakly continuous in $x$ throughout $(-1, 1)$, and weakly derivable on a subset $S$ of $(-1, 1)$ of full measure, including the point $x = 0$; i.e. suppose that, for any fixed $u, v \in \mathfrak{H}$,*

$$(F(y)\,u, v) \to (F(x)\,u, v) \quad \text{for} \quad y \to x,$$

$$\left(\frac{F(y)-F(x)}{y-x}\,u, v\right) \to (F'(x)\,u, v) \quad \text{for} \quad y \to x,\ x \in S,$$

*the "derivative" $F'(x)$ being necessarily a bounded symmetric operator;*

b) $F(0) = O$, $F'(0) = I$;

c) *putting $K(x, y) = \dfrac{F(y)-F(x)}{y-x}$ if $x \neq y$, and $K(x, x) = F'(x)$, then*

$$\sum_i \sum_j \alpha_i \bar{\alpha}_j K(x_j, x_i) \geqq O \tag{6}$$

*for any $x_1, \dots, x_n \in S$, and any complex $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ("weak positive definiteness").*

*Then there exists, in a Hilbert space $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{H}$, a self-adjoint operator $A$ with $\|A\| \leqq 1$, such that $F(x)$ be the "projection" of $x(I - xA)^{-1}$ on $\mathfrak{H}$:*

$$F(x) = \operatorname{pr} x(I - xA)^{-1}, \qquad |x| < 1.^{2)}$$

Proof. For any fixed $u \in \mathfrak{H}$, $(F(x)\,u, u)$ satisfies the conditions of theorem A, thus we have

$$(F(x)\,u, u) = \int_{-1-0}^{1} \frac{x}{1-xt}\, dm(u; t) \qquad (|x| < 1)$$

[2]) For this terminology and notation see B. Sz.-Nagy, *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace.* Appendice au livre "Leçons d'analyse fonctionnelle" par F. Riesz et B. Sz.-Nagy (Budapest, 1955).

where $m(u;t)$ is a non-decreasing function of $t$, which is normalized by the condition that it is right-continuous and $m(u;-1-0)=0$. We have, moreover,

$$(7) \qquad m(u;1)=(F'(0)\,u,u).$$

Putting, for $u, v \in \mathfrak{H}$,

$$m(u,v;t)=\frac{1}{4}[m(u+v;t)-m(u-v;t)+i\,m(u+iv;t)-i\,m(u-iv;t)],$$

we get a right-continuous function of bounded variation, with $m(u,v;-1-0)=0$, such that

$$(8) \qquad (F(x)\,u,v)=\int_{-1-0}^{1}\frac{x}{1-xt}\,dm\,(u,v;t) \qquad (|x|<1).$$

This relation (8) and the normalization conditions determine the function $m(u,v;t)$ uniquely. As a matter of fact, the function

$$w(z)=\int_{-1-0}^{1}\frac{1}{z-t}\,dm(t)$$

is, for any $m(t)$ of bounded variation, regular in the complex plane cut along the segment $[-1,1]$ of the real axis. In our case, the values of $w(z)$ are given for $z=1/x, |x|<1$, thus $w(z)$ is uniquely determined in its whole domain, and $m(t)$ is determined by $w(z)$ by the well-known inversion formula of Stieltjes.

We have in particular $m(u,u;t)=m(u;t)$, and, since the left-hand side of (8) is, for any fixed $t$, a (hermitian) symmetric bilinear form in $f, g$, so is $m(u,v;t)$ necessarily a symmetric bilinear form in $f, g$, too.

Therefore, there exists a bounded symmetric operator $B(t)$ on $\mathfrak{H}$ such that

$$m(u,v;t)=(B(t)\,u,v);$$

$B(t)$ is a non-decreasing, right-continuous function of $t$, with $B(-1-0)=O$ $B(1)=F'(0)=I$. In other words, $\{B(t)\}$ is a generalized spectral family. By a well-known theorem of M. Neumark, it may be represented in the form

$$B(t)=\operatorname{pr}E(t),$$

where $\{E(t)\}$ is an ordinary spectral family in a convenient larger Hilbert space $\mathfrak{K}$.[3]) It results of (8), then, that

$$F(x)=\operatorname{pr}x(I-xA)^{-1}$$

---

[3]) See f. i. [2])

where $A$ denotes a self-adjoint operator on $\mathfrak{K}$, namely:

$$A = \int_{-1-0}^{1} t\, dE(t).$$

This finishes the proof.

**3.** We may generalize the theorem still further, by dropping the condition $F'(0) = I$. Then the following representation holds:

$$F(x) = R \cdot \mathrm{pr}\, x(I - xA)^{-1} \cdot R$$

with a self-adjoint $A$ in $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{H}$, $\|A\| \leqq 1$, and with a positive self-adjoint $R$ in $\mathfrak{H}$,

$$R = [F'(0)]^{1/2}.$$

We omit the proof; it goes partially along similar lines that were followed by the author in a previous paper.[4])

(Received May 20, 1956.)

[4]) BÉLA SZ.-NAGY, A moment problem for self-adjoint operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 3 (1952), 285—293.

# Über nichtauflösbare endliche Gruppen.

Von N. ITÔ in Nagoya (Japan) und J. SZÉP Szeged (Ungarn).

Es bezeichne $G$ eine endliche Gruppe, $r(G)$ die Anzahl derjenigen nichtisomorphen Untergruppen von $G$, die keine Normalteiler in $G$ sind, ferner bezeichne $t(G)$ die Anzahl der in der Ordnung von $G$ auftretenden verschiedenen Primfaktoren.

ITÔ [1] hat folgenden Satz bewiesen:

A) Gilt für die nichtauflösbare endliche Gruppe $G$ die Ungleichung $r(G) < 2t(G)+2$, so ist $G$ mit der Ikosaedergruppe isomorph.

Mit Hilfe dieses Ergebnisses beweisen wir jetzt den folgenden

Satz. *Es sei $G$ eine nichtauflösbare endliche Gruppe mit der Eigenschaft $r(G) \leqq 3t(G)+2$, die einen $p$-Normalteiler ($\neq 1$) enthält ($p$ Primzahl). Dann ist $G$ mit einer der folgenden Gruppen isomorph:*

a) *die spezielle lineare homogene Gruppe $SLH(2, 5)$,*

b) *die Gruppe $A_5 \times Z_p$, wo $A_5$ die Ikosaedergruppe, $Z_p$ eine zyklische Gruppe von der Ordnung $p$ ($\neq 2, 3, 5$) bedeutet.*

Beweis. Setzen wir voraus, daß $G$ nicht zu den im Satz erwähnten Typen gehört, so werden wir mit der Bedingung $r(G) \leqq 3t(G)+2$ in einen Widerspruch geraten.

Vor allem gilt offenbar $t(G) \geqq 3$. Es sei $P$ der erwähnte $p$-Normalteiler von $G$.

Zuerst zeigen wir, daß $P$ keine Sylowgruppe von $G$ sein kann. Wäre nämlich $P$ eine Sylowgruppe von $G$, so würde nach einem bekannten Satz von SCHUR [2] $G = PH$ ($P \cap H = 1$) sein, wobei $H$ eine Untergruppe von $G$ ist. Ist $H$ ($\approx G/P$) mit der Ikosaedergruppe nicht isomorph, so gilt nach A) $r(H) \geqq 2(t(G)-1)+2 = 2t(G)$ und somit $r(G) \geqq r(G/P) + r(H) \geqq 4t(G) \geqq \geqq 3t(G)+3$, was einen Widerspruch bedeutet. Ist $H$ mit der Ikosaedergruppe isomorph, so ist $t(G) = 4$ und $r(H) = r(G/P) = 7$. In diesem Falle muß $P$ ein minimaler Normalteiler von $G$ sein. Wäre nämlich auch $P' \subset P$ ein Normalteiler von $G$, dann wäre $r(G) > r(P'H) \geqq r(P'H/P') + r(H) = 14$, was einen Widerspruch bedeutet. Ist die Ordnung von $P$ größer als $p$, so hat $G$

eine Untergruppe der Ordnung $p$, woraus $r(G) > r(G/P) + r(H)$ folgt, was wieder einen Widerspruch bedeutet. Folglich ist $P$ von der Ordnung $p$. Wir zeigen, daß $P$ das Zentrum von $G$ ist. Es sei nämlich $Q$ eine 2-Sylowgruppe von $G$ (also eine Vierergruppe). Betrachten wir die Gruppe $PQ$. In dieser hat $P$ einen von $P$ verschiedenen Zentralisator, was wegen $G/P \approx A_5$ nur dann möglich ist, falls der Zentralisator von $P$ mit $G$ zusammenfällt. Somit ist $G \approx A_5 \times Z_p$ und dies widerspricht unserer Voraussetzung, daß $G$ nicht zu den erwähnten Typen gehört.

Setzen wir nun voraus, daß $P$ keine Sylowgruppe von $G$ ist In diesem Falle führen wir den Beweis in zwei Teilen aus.

1) Wir setzen voraus, daß $G/P$ mit der Ikosaedergruppe nicht isomorph ist.

Es sei $P$ ein maximaler $p$-Normalteiler von $G$. Zuerst zeigen wir, daß $P$ zugleich auch minimal in $G$ (also der einzige $p$-Normalteiler von $G$) ist. Es sei nämlich $P'(\neq P)$ ein $p$-Normalteiler von $G$. Nach A) gilt $r(G/P) \geqq 2t(G) + 2$ $(t(G/P) = t(G)$; es sollen auch die $t(G) - 1$ nicht zu $p$ gehörigen Sylowgruppen von $G$ zu diesen Untergruppen gerechnet werden. Nun existieren in $G$ mindestens zwei Sylowgruppen $S$ und $S'$, für welche $P'S$ und $P'S'$ keine Normalteiler in $G$ sind. Diese beiden Untergruppen zu den vorher erwähnten hinzunehmend gelangen wir zu einem Widerspruch.

Wir haben schon gesehen, daß es in $G$ jedenfalls $2t(G) + 2 + t(G) - 1 = 3t(G) + 1$ Untergruppen gibt. Um einen Widerspruch zu erhalten, müssen wir noch die Existenz zweier passender Untergruppen nachweisen. Ist die Ordnung von $P$ größer als $p^2$, so hat $G$ eine Untergruppe der Ordnung $p$ und eine der Ordnung $p^2$, womit wir in Widerspruch geraten werden. Es habe $P$ die Ordnung $p^2$. Auch in diesem Falle gibt es eine gewünschte Gruppe der Ordnung $p$, so daß wir nur noch die Existenz einer weiteren passenden Untergruppe nachzuweisen haben. Wir machen die (offenbar zulässige) Voraussetzung, daß die nicht zu $p$ gehörigen Sylowgruppen von $G$ Primzahlordnungen haben. Die Ordnung von $G$ enthält mindestens zwei Primzahlen, die größer als $p$ sind, andernfalls wäre nämlich $G$ auflösbar. Es sei $Q$ eine $q$-Sylowgruppe von $G$, wo $q(>p)$ die größte in der Ordnung von $G$ enthaltene Primzahl ist. Man sieht leicht ein, daß in diesem Falle $QP = Q \times P$ gilt. Es gibt also in $G$ eine Gruppe der Ordnung $pq$, die offenbar kein Normalteiler in $G$ ist. Somit gelangen wir wieder zu einem Widerspruch.

Es habe $P$ die Ordnung $p$. In diesem Falle können wir voraussetzen, daß in der Ordnung von $G$ außer $p$ höchstens ein einziger Primfaktor mit einer die Einheit übertreffenden Exponenten auftritt. Es sei $Q$ eine Sylowgruppe der Ordnung $q^2$ von $G$ $(q \neq p)$.

Zuerst beweisen wir, daß $G$ für jeden Primfaktor $r$ der Ordnung von $G$ nicht $r$-nilpotent ist. (Für eine Primzahl $r$ heißt eine endliche Gruppe $r$-nilpotent, wenn die $r$-Sylowgruppen homomorphe Bilder der Gruppe sind.) Ist nämlich $r=p$, ist also $G$ $p$-nilpotent, so bezeichne $H$ die Gruppe $P\times{}_pG$, wo ${}_pG$ das $p$-Sylowkomplement von $G$ ist. ($p$-Sylowkomplement einer endlichen Gruppe $G$ heißt jede Untergruppe von $G$, für die gilt, daß das Produkt ihrer Ordnung und der einer $p$-Sylowgruppe gleich der Ordnung von $G$ ist.) Dann ist (wegen $H \not\cong SLH(2,5)$) $r(H) \geqq 3t(G)+2$. Dazu nehmen wir noch eine $p$-Sylowgruppe hinzu und bekommen so einen Widerspruch. Ist $r \neq p$, so gilt $G \supset {}_rG \supset P$. Ist ${}_rG \not\cong SLH(2,5)$, $A_5 \times Z_p$, so ist $r({}_rG) \geqq 3(t(G)-1)+3=3t(G)$. Außerdem haben wir die Gruppen $G_r, G_rG_s, G_rG_t$ ($r \neq s \neq t \neq r$), wo $G_r, G_s, G_t$ die $r$-, $s$-, $t$-Sylowgruppen von $G$ sind. Ist ${}_rG \cong A_5 \times Z_p$, so ist $t(G)=5, r({}_rG)=14$. Außerdem haben wir die Gruppen $G_r, G_r(A_5\times Z_p)_2, G_r(A_5\times Z_p)_3, G_r(A_5\times Z_p)_5$. Endlich sei ${}_rG \cong SLH(2,5)$, so ist $t(G)=4, r({}_rG)=11$. Dann nehmen wir die Gruppen $G_r, G_r(SLH)_2, G_r(SLH)_3, G_r(SLH)_5$ hinzu, so bekommen wir einen Widerspruch.

Wir setzen jetzt unseren Beweis mit Hilfe einer anderen Abzählung der Untergruppen von $G$ fort. Es habe in $G$ die $p$-Sylowgruppe $\bar{P}$ die Ordnung $p^{e+1}$. Wir betrachten die Faktorgruppe $G/P$. Diese enthält $t(G)$ Sylowgruppen und eben so viel minimale, nicht $r$-nilpotente Untergruppen, die nämlich den verschiedenen Primfaktoren der Ordnung von $G$ entsprechen. Falls wir zu diesen $2t(G)$ Gruppen die $t(G)-1$ nicht zu $p$ gehörigen Sylowgruppen von $G$, sowie eine Untergruppe der Ordnung $q$ von $G$ hinzurechnen, dann müssen wir, um zu einem Widerspruch zu gelangen, noch die Existenz von drei passenden Untergruppen nachweisen. Falls $e>2$ besteht, dann führen die Untergruppen der Ordnungen $p, p^2$ bzw. $q$ von $G/P$ bereits zum gewünschten Widerspruch. Es sei nunmehr $e=2$. Auch jetzt gibt es in $G/P$ zwei Untergruppen der Ordnungen $p$ bzw. $q$. Um zu einem Widerspruch zu gelangen, müssen wir die Existenz noch einer Untergruppe nachweisen. Enthält $\bar{P}$ ausser $P$ noch eine Untergruppe der Ordnung $p$, dann haben wir damit den gewünschten Widerspruch. Andernfalls ist $\bar{P}$ entweder zyklisch, oder aber fällt es mit der Quaternionengruppe zusammen. Setzen wir $\bar{P}$ als zyklisch voraus. Da $P$ Normalteiler in $G$ ist, ist $\bar{P}$ in $G$ im Zentrum seines Normalisators enthalten, so daß (nach einem Satz von Burnside) $G=H\bar{P}$ ($H \cap \bar{P}=1$) gilt. Ist $H$ $q$-nilpotent, dann enthält sie eine Gruppe der Ordnung $rq^2$ ($r$ Primzahl), was zu einem Widerspruch führt. Andernfalls enthält sie eine minimale nicht $q$-nilpotente Gruppe, was auch einen Widerspruch bedeutet. Es sei nunmehr $\bar{P}$ die Quaternionengruppe. Wir betrachten den Normalisator der Sylowgruppe $Q$. Dieser ist von $Q$ verschieden, denn andernfalls ist $G$ $q$-nilpotent, woraus sich leicht ein Widerspruch ergibt. Ist die Ordnung dieses Normalisators nicht durch 2 teilbar, so enthält er eine Gruppe von der Ordnung $q^2 r$ ($r$ eine von 2 verschiedene Primzahl), und dies führt zu einem Widerspruch. Ist dagegen die Ordnung des Normalisators durch 2 teilbar, so ist auch die Ordnung des Normalisators der $q$-Sylowgruppe von $G/P$ durch 2 teilbar, und somit gibt es in $G/P$ eine Gruppe der Ordnung $2q$, was zu einem Widerspruch führt. Es sei nunmehr $e=1$. In diesem Falle ist $q$ offenbar der kleinste in der Ordnung von $G$ enthaltene Primfaktor, und es gilt $q=2$, denn andernfalls wäre $G$ auflösbar. Betrachten wir jetzt das Produkt der 2-Sylowgruppe von $G$ und der Gruppe $P$. In dieser hat $P$ einen von $P$ verschiedenen Zentralisator, also ist $P$ im Zentrum von $G$ enthalten. Andernfalls wäre nämlich $G_1$ auflösbar. Ist $\bar{P}$ zyklisch, so fällt sein Normalisator mit seinem Zentralisator zusammen, so daß $\bar{P}$ im Zentrum seines Normalisators enthalten ist, und dies führt, auf analoger Weise wie im vorigen Falle, zu einem Widerspruch. Ist $\bar{P}$ nicht zyklisch, so enthält $G$ eine von $P$ verschiedene Gruppe der Ordnung $p$, und das führt zu einem Widerspruch.

Wir können also voraussetzen, daß die von $\bar{P}$ verschiedenen Sylowgruppen von $G$ Primzahlordnung haben. Auch jetzt gibt es in $G/P$ $t(G)$ Sylowgruppen und $t(G)$ minimale nicht $r$-nilpotente Gruppen zu jedem Primfaktor $r$ der Ordnung von $G$. Wenn wir noch die $t(G)-1$ nicht zur Primzahl $p$ gehörigen Sylowgruppen von $G$ hinzurechnen, dann müssen wir, um zu einem Widerspruch zu gelangen, noch die Existenz vier passender Untergruppen nachweisen. Vor allem bemerken wir, daß $\bar{P}/P$ und somit auch $\bar{P}$ keine zyklische Gruppen sein können, weil dann $G$ auflösbar wäre [3]. Es sei $e \geqq 4$. Ist $\bar{P}$ nicht die verallgemeinerte Quaternionengruppe, so gibt es in $\bar{P}$ vier passende Gruppen (der Ordnungen $p, p^2, p^3$ und $p^4$) und so erhalten wir einen Widerspruch. Ist $\bar{P}$ die verallgemeinerte Quaternionengruppe und ist die Ordnung von $P$ größer als 2, so gibt es in $\bar{P}$ wieder vier passende Untergruppen, was zu einem Widerspruch führt. Es habe nun $P$ die Ordnung 2; auch jetzt können wir annehmen, daß $\bar{P}$ die verallgemeinerte Quaternionengruppe ist. In diesem Fall ist der Normalisator der 2-Sylowschen Untergruppe von $G/P$ nicht gleich dieser 2-Sylowschen Untergruppe und dieser Normalisator enthält eine neue Untergruppe. Also kann man auch in diesem Falle vier neue Untergruppen finden, was zu einem Widerspruch führt. Es sei jetzt $e=3$. Auch in diesem Falle gibt es in $\bar{P}/P$ zwei Gruppen von $p$-Potenzordnung (der Ordnungen $p$ und $p^2$). Wir müssen also nur noch die Existenz zweier weiteren Gruppen nachweisen. Im Falle $p>2$ gibt es in $\bar{P}$ eine Gruppe der Ordnung $p$. Gibt es in $\bar{P}$ ein Element der Ordnung $p^2$, so gibt es zweierlei Gruppen mit solcher Ordnung, und das bedeutet einen Widerspruch. Es sei $\bar{P}$ eine elementare $p$-Gruppe (d. h. jedes Element von $\bar{P}$ habe die Ordnung $p$). Ist die Gruppe $\bar{P}$ Abelsch, so betrachten wir die minimale nicht $p$-nilpotente Untergruppe $R$ von $G/P$. Es sei $Q$ das $p$-Sylowsche Komplement dieser Untergruppe in $G$. Da $\bar{P}$ Abelsch ist, gibt es eine Untergruppe $P'$ derart, daß die $p$-Sylowgruppe von $R$ in $G$ in der Form $P \times P'$ darstellbar ist. In diesem Falle ist aber $P'Q$ eine neue Untergruppe, was zu einem Widerspruch führt. Es sei jetzt $\bar{P}$ nicht Abelsch. Dann hat $\bar{P}$ die Kommutatorgruppe $P$. (Ist nämlich $\bar{P}/P$ nicht Abelsch, so ist $G/P$ — nach einem Satz von H. Wielandt [4] — $p$-nilpotent.) Nun enthält $\bar{P}$ zweierlei Untergruppen der Ordnung $p^3$; die eine ist Abelsch, die andere aber nicht. Somit erhalten wir wieder einen Widerspruch. Es sei jetzt $p=2$. Ist $\bar{P}$ nicht die verallgemeinerte Quaternionengruppe, so gibt es in $\bar{P}$ außer $P$ noch eine Gruppe der Ordnung 2. Falls jetzt noch $\bar{P}$ ein Element der Ordnung 4 enthält, dann gibt es in $\bar{P}$ zweierlei Untergruppen der Ordnung 4, was bereits den gewünschten Widerspruch ergibt. Wir können also $\bar{P}$ als Abelsche Gruppe vom Typus $(2, 2, \ldots)$ voraussetzen. Betrachten wir die minimale nicht 2-nilpotente Untergruppe von $G/P$. Das führt, ähnlich wie im vorigen Falle, zu einem Widerspruch. Es sei $\bar{P}$ die verallgemeinerte Quaternionengruppe. Wir betrachten in $G/P$ eine minimale nicht 2-nilpotente Untergruppe. Die Ordnung dieser Untergruppe ist durch 12 teilbar, so daß $G$ eine Untergruppe der Ordnung 24 enthält. Weiterhin enthält $\bar{P}$ zweierlei Untergruppen der Ordnung 8. (Die eine ist zyklisch, die andere eine Quaternionengruppe.) Dies führt zu einem Widerspruch. Nunmehr sei $e=2$. In diesem Falle ist $p=2$. Auch jetzt gibt es in $G/P$ $t(G)$ Sylowgruppen, $t(G)$ minimale nicht nilpotente Untergruppen, sowie eine Untergruppe der Ordnung 2. Wir müssen noch die Existenz dreier Untergruppen nachweisen. Wir können die Gruppe $G/P$ als einfach voraussetzen. Ist nämlich $N$ Normalteiler von $G/P$, dann ist $N$ nicht auflösbar, denn andernfalls würde sich leicht ein Widerspruch ergeben. $N$ enthält also die 2-Sylowgruppe von $G$. Ist $s|(G:N)$ und $q, r|(N)$ ($q \neq r$; $s, q, r$ ungerade Primzahlen), so existieren in $G$ Untergruppen der Ordnungen $qs, rs$ und $2^3s$, und somit erhalten wir einen Widerspruch. Da nach unseren Voraussetzungen $G/P \not\cong A_5$ ist, so gibt es in $G/P$ nach einem Satz von L. Rédei [5] eine nichtabelsche zweitmaximale Untergruppe. Es sei $H$ eine maximale Untergruppe von $G/P$, welche die erwähnte zweitmaximale Untergruppe enthält. Setzen wir zuerst $H$ als auflösbar voraus. Die Ordnung von $H$ ist offenbar mindestens durch drei verschiedene Primfaktoren $q, r, s$ teilbar. Sind die Zahlen $q, r, s$ ungerade, so enthält $H$ eine Untergruppe der Ordnung $qrs$; diese Gruppe, sowie die darin enthaltenen Untergruppen der Ordnungen $qr, qs, rs$ führen zu einem Widerspruch (eine der Gruppen von den Ordnungen $qr, qs, rs$ ist zyklisch). Enthält die Ordnung von $H$ keine drei verschiedenen ungeraden Primzahlen, so enthält $H$ entweder eine Untergruppe der Ordnung $2rq$, oder aber eine der Ordnung $4rq$.

Da eine der Zahlen $r, q$ größer als 3 ist, gelangen wir auf analoger Weise wie im vorigen Falle zu einem Widerspruch. Setzen wir jetzt $H$ als nichtauflösbar voraus. Wie $G/P$, so kann auch $H$ als einfache Gruppe vorausgesetzt werden. In diesem Falle sind aber nach einem Satz von M. SUZUKI [6] $G/P$ und $H$ mit der Ikosaedergruppe $n$-isomorph. (Die maximalen metazyklischen Untergruppen von $G/P$ und $H$ haben nämlich in unserem Falle die Ordnung 4, und gehören zu den von M. SUZUKI beschriebenen Typen.) Somit erhalten wir nochmals einen Widerspruch.

2) Wir machen jetzt die Voraussetzung, daß $G/P$ mit der Ikosaedergruppe isomorph ist.

Ähnlich, wie im vorigen Falle, sieht man auch jetzt leicht ein, daß $P$ der einzige Normalteiler von $p$-Potenzordnung in $G$ ist. Es gilt $t(G)=3$ und $r(G/P)=7$. Außer den $r(G/P)$ Untergruppen hat $G$ noch zwei Sylowgruppen, die zu von $p$ verschiedenen Primzahlen gehören. Wir müssen nur noch die Existenz dreier passender Untergruppen nachweisen. Wir können uns auf den Fall beschränken, daß die Ordnung von $P$ nicht größer als $p^3$ ist, denn andernfalls hat $P$ die neuen Untergruppen der Ordnungen $p, p^2$ und $p^3$, und das bedeutet bereits einen Widerspruch. Es habe $P$ die Ordnung $p^3$. Es sei $p=5$. In diesem Falle sind in $P$ die Gruppen der Ordnungen 5 und 25, sowie in $G$ die Gruppe der Ordnung 2 neu. Somit erhalten wir nochmals einen Widerspruch. Es sei $p=3$. Der Widerspruch wird jetzt durch die neuen Gruppen der Ordnungen 3, 9 und 2 herbeigeführt Es sei $p=2$. Wir betrachten in $G$ das Urbild der Normalisatoren der 5-Sylowgruppe von $G/P$. Dieses hat die Ordnung 80, und man sieht auch leicht, daß es nilpotent ist. Nun ist in dieser Gruppe eine neue Gruppe der Ordnung 10 enthalten, und wenn man noch die Untergruppen der Ordnungen 2 und 4 von $P$ hinzunimmt, so ergibt sich auch hier der gewünschte Widerspruch. Es habe $P$ die Ordnung $p^2$. Es sei $p=5$ oder $p=3$. Da die Untergruppen der Ordnung 5 oder 3 von $P$, und die Untergruppen der Ordnungen 2 und 6 oder 10 von $G$ neu sind, so haben wir wieder einen Widerspruch. Es sei jetzt $p=2$. Wir betrachten in $G$ das Urbild des Normalisators der 5-Sylowgruppe von $G/P$. Dieses Urbild ist eine nilpotente Gruppe der Ordnung 40. Ihre Untergruppe von der Ordnung 10 ist neu. Betrachten wir jetzt das Urbild des Normalisators der 3-Sylowgruppe von $G/P$ in $G$. Dieses enthält eine Untergruppe der Ordnung 6 oder der Ordnung 12, deren 2-Sylowgruppe zyklisch ist. So ist auch diese Gruppe neu. Nehmen wir jetzt noch die Untergruppe der Ordnung 2 von $P$ hinzu, so erhalten wir einen Widerspruch.

Es habe endlich $P$ die Ordnung $p$. Nach einem Satz von ZASSENHAUS [7] ist dann $p=2$. Die Gruppe hat also die Ordnung 120, und kann somit in unserem Falle nur mit der in unserem Satze erwähnten Gruppe zusammenfallen. (S. auch Satz 12 in der erwähnten Arbeit von ZASSENHAUS.)

## Literaturverzeichnis.

[1] N. Itô, On the number of isomorphic classes of non-normal subgroups in a finite group, *diese Acta* **16** (1955), 9—11.
[2] H. Zassenhaus, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Bd. I (Berlin—Leipzig, 1937), Satz 25, p. 125.
[3] *ebenda*, Satz 11, p. 139.
[4] H. Wielandt, $p$-Sylowgruppen und $p$-Faktorgruppen, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **182** (1940), 180—193.
[5] L. Rédei, Ein Satz über die endlichen, einfachen Gruppen, *Acta Math.*, **84** (1950), 129—153.
[6] M. Suzuki, A characterization of simple groups $LF(2, p)$, *Journal of the Faculty of Science, Univ. of Tokyo*, Section I, **6** (1951), 259—293.
[7] H. Zassenhaus, Über endliche Fastkörper, *Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hansischen Univ.*, **11** (1936), S. 187—220, Satz 12, 15.

*(Eingegangen am 29. März 1956.)*

# Über Gruppen, deren sämtliche nicht-triviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind.

Von F. SZÁSZ in Debrecen.

*Dem Andenken meines Lehrers T. Szele gewidmet*

Unter der $k$-ten Potenz $G^k$ einer beliebigen Gruppe $G$ versteht man die durch die $k$-ten Potenzen der Elementen von $G$ erzeugte Untergruppe. Die Potenzen $G^1 = G^{-1} = G$ und $G^0 = \{1\}$ nennen wir trivial.

Wir haben in der Arbeit[1]) alle Gruppen bestimmt, deren sämtliche zyklische Untergruppen gewisse Potenzen der Gruppe sind. Das duale Problem, d. h. die Bestimmung aller Gruppen, deren sämtliche nicht-triviale Potenzen zyklisch sind, wurde von Professor L. FUCHS aufgeworfen und wird hier von uns gelöst.

Eine beliebige Gruppe $G$ wird eine *Gruppe mit der Eigenschaft E* genannt, wenn ihre sämtlichen nicht-trivialen Potenzen zyklisch sind. Jede zyklische Gruppe hat die Eigenschaft $E$. Das Ziel dieser Arbeit ist nachzuweisen, daß duch die Eigenschaft $E$ unter allen Gruppen die zyklischen Gruppen charakterisiert werden. Die sämtlichen nicht-trivialen Potenzen der Gruppe $G$ können also nur so zyklisch sein, wenn auch die trivialen Potenzen zyklisch sind.

Satz. *Eine Gruppe G hat die Eigenschaft E dann und nur dann, wenn sie zyklisch ist.*

Beweis. Nehmen wir an, daß $G$ eine periodische Gruppe mit der Eigenschaft $E$ ist. Es sei $g$ ein beliebiges Element der Gruppe $G$ und $O(g) = m$. Ist $k > 1$ eine ganze Zahl mit $(k, m) = 1$, so existiert eine ganze Zahl $r$, für welche die Kongruenz $kr \equiv 1 \pmod m$ besteht. Da aber $G^k = \{a\}$ zyklisch ist, und die Gleichung $g^k = a^i$ mit einem gewissen Exponenten $i$ gilt, so bekommen wir $g = a^{ir}$, d. h. $G = \{a\}$.

---

[1]) F. SZÁSZ, On groups every cyclic subgroup of which is a power of the group, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 6 (1956), 475—477.

Es sei nachher $G$ eine Gruppe mit der Eigenschaft $E$ und $g$ ein Element von $G$ mit $O(g)=\infty$. Ist $G^2=\{a\}$ und $G^3=\{b\}$, so gilt $O(a)=\infty$ und $O(b)=\infty$. Da aber $\{a\}$ und $\{b\}$ Normalteiler von $G$ sind, folgt hieraus die Existenz von ganzen Zahlen $r, s$ mit $b^2=a^r$ und $b^{-1}ab=a^s$. Wir bekommen $b^2=b^{-1}a^rb=(b^{-1}ab)^r=a^{rs}=b^{2s}$, weshalb $2s=2$ und $s=1$, d. h. $ab=ba$ ist. Ist $x$ ein beliebiges Element von $G$, so folgt aus $x=x^{-2}\cdot x^3$ ($x^{-2}\in\{a\}=G^2$ und $x^3\in\{a,b\}=G^3$) das Bestehen von $G=\{a,b\}$. $G$ ist also eine torsionsfreie kommutative Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden. Die Abbildung $x\rightarrow x^k$ ($k\neq 0$, $x\in G$) ist ein Meromorphismus der Gruppe $G$. Für $k>1$ ist die Potenz $G^k$ ein isomorphes Bild von $G$, also ist auch $G$ zyklisch.

Andererseits ist klar, daß alle zyklischen Gruppen die Eigenschaft $E$ haben, womit unser Satz bewiesen ist.

*(Eingegangen am 29. August 1955, in endgültiger Form am 12. März 1956.)*

# Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume.

Von ARTHUR MOÓR in Debrecen.

**Inhalt.**



## Einleitung.

Nach der Entwicklung der Geometrie der Riemannschen Räume hat zuerst P. FINSLER in seiner berühmten Arbeit [8][1]) die differentialgeometrischen Untersuchungen auf allgemeinere Räume erweitert. Im Anschluß an diese Untersuchungen hat dann E. CARTAN darauf hingewiesen [3], daß die von P. FINSLER untersuchten Räume, die wir kurz als Finslerräume bezeichnen wollen, sich von anderen metrischen Räumen dadurch unterscheiden, daß ihr Grundelement ein Linienelement ist. Seit CARTANS Untersuchungen betrachtet man einen Finslerraum als eine metrische Mannigfaltigkeit der Linienelemente $(x^i, v^i)$, in der die Metrik durch eine metrische Grundfunktion $F(x, v)$ fest-

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern deuten an das Schriftenverzeichnis am Ende von unserer Arbeit.

gelegt ist. Die Grundfunktion $F(x, v)$ bestimmt den metrischen Grundtensor $g_{ik}$ des Finslerraumes durch die Formel:

$$g_{ik} = \frac{1}{2} \partial^2_{v^i v^k} F^2, \quad \partial^2_{v^i v^k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial_{v^i} \partial_{v^k}}. \tag{0. 1}$$

Im folgenden wollen wir die Geometrie eines allgemeineren Raumes $\mathfrak{L}_n$ entwickeln. Die Verallgemeinerung wird darin bestehen, daß wir die Metrik des Raumes unmittelbar durch einen metrischen Grundtensor $g_{ik}$ festlegen; die Komponenten des metrischen Grundtensors sind also nicht durch eine Grundfunktion $F(x, v)$ in der Form (0. 1) bestimmt. Dabei ist $g_{ik}$ selbstverständlich von dem Linienelement $(x^i, v^i)$ abhängig. Der Finslerraum ist offenbar als Spezialfall in unserem Raum enthalten, denn der Finslerraum ist eben dadurch gekennzeichet, daß in ihm der metrische Grundtensor $g_{ik}$ die Form (0. 1) hat. (Vgl. die Bemerkung am Ende von § 1.)

Eine derartige allgemeine Geometrie haben wir schon in unserer Arbeit [10] entwickelt, doch wollen wir jetzt noch weitere Verallgemeinerungen dadurch erreichen, daß wir die Bedingung

$$A_{oik} \equiv A_{iok} = p\, l_i A_k$$

durch eine allgemeinere ersetzen, und für die Übertragungsparameter des Raumes keine Symmetrieforderungen voraussetzen werden. Dabei fordern wir aber, daß die Übertragung metrisch sei.

*Unser Hauptziel ist die Untersuchung der Bewegungsgruppe und deren Integrabilitätsbedingungen bezüglich dieser allgemeinen metrischen Übertragung.* Es wird sich zeigen, daß die Integrabilitätsbedingungen der Killingschen Gleichungen formal mit den für die symmetrische Übertragung bestimmten Gleichungen identisch sind, nur die Liesche Ableitung hat in tensorieller Form einen verschiedenartigen Charakter. Es kommt nämlich in der Lieschen Ableitung auch der schiefsymmetrische Teil des Übertragungsparameters vor.

Dementsprechend zerfällt unsere Arbeit in zwei Hauptteile. Die erste enthält die Entwicklung der Geometrie des allgemeinen metrischen Linienelementraumes mit der Krümmungstheorie, während wir im zweiten Teil die Integrabilitätsbedingungen der Bewegungsgruppe und die spezielle Form des Hauptkrümmungstensors näher untersuchen werden. Wir wollen noch darauf hinweisen, daß die Symbolik der Geometrie, die wir im folgenden entwickeln wollen, formal sehr viele Ähnlichkeit mit der Geometrie der allgemeinen Räume aufweist, deren Grundelement eine Vektordichte vom Gewicht $(+p)$ ist. (Vgl. [5], [9], [13]). Das werden wir im folgenden auch bei der Untersuchung einzelner Fälle noch zeigen können.

## I. TEIL. DIE VEKTORÜBERTRAGUNG UND DIE KRÜMMUNGSTHEORIE IM ALLGEMEINEN METRISCHEN LINIENELEMENTRAUM

### § 1. Festlegung der Metrik.

Zugrunde gelegt sei eine $(2n-1)$-dimensionale Linienelementmannigfaltigkeit $\mathfrak{L}_n$. Die Grundelemente von $\mathfrak{L}_n$ sind also die Linienelemente $(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n)$ (oder kurz $(x, v)$), wo die $x^i$ einen Punkt, nämlich das Zentrum des Linienelementes, während die $v^i$ seine Richtung bestimmen. Offenbar kommt bei den $v^i$ nur ihr Verhältnis in Betracht, d. h. $v^i$ und $\varrho v^i$ $(\varrho > 0)$ bestimmen dieselbe Richtung. Dementsprechend müssen die charakteristischen Größen von $\mathfrak{L}_n$ immer in den $v^i$ positiv homogen von nullter Dimension sein.

Wir nehmen noch an, daß im Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ ein metrischer Grundtensor $g_{ik}(x, v)$ existiert, der in $i, k$ symmetrisch ist und außerdem nach ihren Argumenten mindestens viermal stetig partiell ableitbar ist. Für die Krümmungstheorie ist diese Annahme schon hinreichend; in denjenigen Fällen aber, wo auch höhere partielle Ableitungen von $g_{ik}$ vorkommen, wollen wir ihre Existenz und Stetigkeit immer voraussetzen.

Die Länge einer Kurve

$$x^i = x^i(t)$$

zwischen den Parameterwerten $t_1, t_2$ in $\mathfrak{L}_n$ bezüglich des Richtungsfeldes $v^i = v^i(t)$ ist durch die Formel

$$s_{1.2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ik}(x(t), v(t))\dot{x}^i \dot{x}^k}\, dt, \qquad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt} \tag{1.1}$$

bestimmt.

Bedeuten $\xi^i(x, v)$ und $\eta^i(x, v)$ zwei Vektoren von $\mathfrak{L}_n$, so ist die Länge von $\xi^i$ durch die Formel

$$\xi = \sqrt{g_{ik}(x, v)\xi^i \xi^k} \tag{1.2}$$

bestimmt, während der Winkel $\theta$ von $\xi^i$ und $\eta^i$ durch

$$\cos\theta = \frac{g_{rs}\xi^r \eta^s}{\sqrt{g_{ik}\xi^i \xi^k}\,\sqrt{g_{jm}\eta^j \eta^m}} \tag{1.3}$$

festgelegt ist. Diese Formeln stimmen also mit denen der Riemannschen Geometrie (vgl. [4]) überein, nur hängen jetzt die in den Gleichungen (1. 1)—(1. 3) vorkommenden Größen von $(x^i, v^i)$ ab, während sie im Riemannschen Raum nur von $x^i$ abhängig sind.

Wir definieren jetzt eine im folgenden sehr wichtige Funktion, die bei der Homogenisierung verschiedener Größen eine wichtige Rolle spielen wird.

Es sei

(1.4) $$F(x, v) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ik}(x, v) v^i v^k}.$$

Offensichtlich ist $F(x, v)$ in $v^i$ homogen von erster Dimension, da $g_{ik}$ homogen von nullter Dimension ist. In einem Finslerraum ist $F(x, v)$ eben die Grundfunktion des Raumes, im $\mathfrak{L}_n$ hat aber $F(x, v)$ keine solche fundamentale Bedeutung, da in $\mathfrak{L}_n$ aus (1.4) das Bestehen der Relation (0.1) nicht folgt.

Der Einheitsvektor, der die Richtung seines Stützelementes hat, hat die kontravarianten Komponenten:

(1.5) $$l^i = \frac{v^i}{F(x, v)}.$$

Aus den Gleichungen (1.2) und (1.4) kann unmittelbar verifiziert werden, daß $l^i$ ein Einheitsvektor ist.

Wie wir schon in unserem Aufsatz [10] darauf hingewiesen haben, kann in einem $\mathfrak{L}_n$ die Metrik ebenso wie im Finslerraum durch die zum Punkt $\underset{(0)}{x^i}$ gehörige Carathéodorysche Indikatrixfläche

$$F(\underset{(0)}{x}, l) = 1$$

bzw. die zum Linienelement $(\underset{(0)}{x^i}\, \underset{(0)}{v^i})$ gehörige sog. oskulierende Indikatrix

$$g_{ik}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{v}) X^i X^k = 1$$

charakterisiert werden (vgl. [16] Gl. (2.4) und (2.5)).

Bemerkung. Nach (1.1) und (1.4) kann $\mathfrak{L}_n$ auch als einen Finslerraum betrachtet werden, in dem aber — wie wir es im folgenden sehen werden- die Übertragung eine Verallgemeinerung derjenigen von Cartan ist. (Vgl. [3] und [8.])

## § 2. Das invariante Differential.

Wir werden in diesem Paragraphen ein invariantes Differential der Vektoren und Tensoren bestimmen. Da unser Raum $\mathfrak{L}_n$ im wesentlichen ein Spezialfall des affinzusammenhängenden Linienelementraumes ist, wird das invariante Differential eines Vektors $\xi^i$ die Form:

(2.1) $$D\xi^i = d\xi^i + M_j{}^i{}_k \xi^j dv^k + L_j{}^i{}_k \xi^j dx^k$$

haben, wo für $M_j{}^i{}_k$

(2.1a) $$M_j{}^i{}_k l^k \equiv M_j{}^i{}_o = 0$$

besteht[2]) (vgl. [15] Gleichung (1,4), S. 8). Selbstverständlich müssen noch die

[2]) Wie gewöhnlich bezeichnen wir die Überschiebung mit $l^i$ immer mit einem Index „$o$".

Größen $M_j{}^i{}_k$ und $L_j{}^i{}_k$ durch den metrischen Grundtensor $g_{ik}$ ausgedrückt werden. Vorher wollen wir aber noch die Formel (2. 1) des invarianten Differentials auch in anderen Formen bestimmen.

Bezeichnen wir das invariante Differential von $l^i$ mit $\omega^i(d)$, dann ist auf Grund von (2. 1a)

(2. 2) $$\omega^i(d) \stackrel{\text{def}}{=} Dl^i = (\delta^i_k + \overline{M}_o{}^i{}_k)\, dl^k + L_o{}^i{}_k\, dx^k,$$

wo $\delta^i_k$ das Kroneckersche Symbol[3]), und

$$\overline{M}_j{}^i{}_k = F M_j{}^i{}_k$$

bedeutet, außerdem soll $M_j{}^i{}_k$ noch die Bedingung

(2. 3a) $$(\delta^i_k + \overline{M}_o{}^i{}_k)(\delta^j_i - \overline{M}_o{}^j{}_i) = \delta^j_k,$$

d. h.

(2. 3b) $$\overline{M}_o{}^j{}_i \overline{M}_o{}^i{}_k = 0$$

erfüllen; auf diese Weise erhält man aus der Formel für $\omega^i(d)$:

$$d\frac{v^j}{F} \equiv dl^j = (\omega^i(d) - L_o{}^i{}_k\, dx^k)(\delta^j_i - \overline{M}_o{}^j{}_i).$$

Setzen wir aus dieser Gleichung $dv^j$ in (2. 1) ein, so wird:

(2. 4) $$D\xi^i = d\xi^i + \omega_j{}^i(d)\, \xi^j$$

mit

(2. 5) $$\omega_j{}^i(d) \stackrel{\text{def}}{=} M^*_j{}^i{}_k\, \omega^k(d) + L^*_j{}^i{}_k\, dx^k,$$

wo

(2. 6a) $$M^*_j{}^i{}_k \stackrel{\text{def}}{=} \overline{M}_j{}^i{}_r(\delta^r_k - \overline{M}_o{}^r{}_k),$$

(2. 6b) $$L^*_j{}^i{}_k \stackrel{\text{def}}{=} L_j{}^i{}_k - M^*_j{}^i{}_t L_o{}^t{}_k$$

ist. Die Relation (2. 3b) gibt also mit (2. 1a) zusammen für $M_j{}^i{}_k$ zwei Bedingungen. O. VARGA hat in seinem Aufsatz [15] (Gl. (1. 4a) S. 10) statt (2. 3b) die Bedingung $M_o{}^j{}_i = 0$ gesetzt, für uns wird aber für das folgende die schwächere Bedingung (2. 3b) genügen. Diese kann leicht realisiert werden; z. B. durch die Annahme: $\overline{M}_o{}^i{}_k = l^i A_k$. Es wird dann (2. 3b) nach (2. 1a) identisch erfüllt sein. (Wir werden diesen Fall in § 6. D*) näher untersuchen).

Beachtet man, daß wegen der Homogenität von nullter Dimension in den $v^i$

$$d\xi^i = \partial_k \xi^i dx^k + \xi^i\|_k dl^k, \qquad \partial_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

[3]) Der Wert von $\delta^i_k$ ist gleich 1 oder 0, je nachdem $i = k$, oder $i \neq k$ ist.

ist, wo „$\|_k$" die Operation

$$\|_k \overset{\text{def}}{=} F\partial_{\dot{v}k} \equiv F\frac{\partial}{\partial v^k}$$

bedeutet, so folgt aus (2. 4)—(2. 6b) wenn $dl^k$ wie vorher durch $\omega^k(d)$ ausgedrückt wird, daß das invariante Differential eines Vektors $\xi^i$ auch in der Form:

$$D\xi^i = \xi^i|_k dx^k + \xi^i;_k \omega^k(d) \tag{2.7}$$

darstellbar ist, mit

$$\xi^i|_k \overset{\text{def}}{=} \partial_k \xi^i - \xi^i\|_r \overset{*}{L}{}_o{}^r{}_k + \overset{*}{L}{}_r{}^i{}_k \xi^r, \tag{2.8}$$

$$\xi^i;_k \overset{\text{def}}{=} \xi^i\|_r(\delta^r_k - \overset{*}{M}{}_o{}^r{}_k) + \overset{*}{M}{}_t{}^i{}_k \xi^t. \tag{2.9}$$

Die Formeln (2. 8) und (2. 9) sind die erste und zweite kovariante Ableitung von $\xi^i$ im Raum $\mathfrak{L}_n$.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die $\overset{*}{M}{}_j{}^i{}_k$ und $\overset{*}{L}{}_j{}^i{}_k$ mit $\overline{M}{}_j{}^i{}_k$ bzw. mit $L_j{}^i{}_k$ gleichberechtigt sind. Aus den Gleichungen (2. 6a) und (2. 6b) kann man nämlich $\overline{M}{}_j{}^i{}_k$ und $L_j{}^i{}_k$ ausdrücken; nach einer Überschiebung von (2. 6a) mit $(\delta^k_m + \overline{M}{}_o{}^k{}_m)$ bzw. mit $l^j$ wird im Hinblick auf (2. 3a) und (2. 3b):

$$\overline{M}{}_j{}^i{}_m = \overset{*}{M}{}_j{}^i{}_k(\delta^k_m + \overline{M}{}_o{}^k{}_m), \qquad \overline{M}{}_o{}^k{}_m = \overset{*}{M}{}_o{}^k{}_m\,.$$

Aus (2. 6b) bekommt man nach einer Überschiebung mit $l^j$ wegen (2. 3b)

$$\overset{*}{L}{}_o{}^i{}_k = (\delta^i_r - \overline{M}{}_o{}^i{}_r) L_o{}^r{}_k\,.$$

Aus dieser Gleichung erhält man $L_o{}^j{}_k$ nach einer Überschiebung mit $(\delta^j_i + \overline{M}{}_o{}^j{}_i)$; setzt man den erhaltenen Wert von $L_o{}^j{}_k$ in (2. 6b) ein, so wird

$$L_j{}^i{}_k = \overset{*}{L}{}_j{}^i{}_k + \overline{M}{}_j{}^i{}_r \overset{*}{L}{}_o{}^r{}_k \tag{2.10}$$

w. z. b. w.

Wenn man also die Übertragung aus $g_{ik}$ bestimmen will, so genügt hierzu schon die Bestimmung von $\overset{*}{M}{}_j{}^i{}_k$ und $\overset{*}{L}{}_j{}^i{}_k$ durchzuführen. Wir fordern: *die Übertragung mit den Übertragungsparametern $\overset{*}{M}{}_j{}^i{}_k$ und $\overset{*}{L}{}_j{}^i{}_k$ soll metrisch sein.* Die analytische Bedingung dafür ist das Verschwinden des invarianten Differentials von $g_{ik}$. Nach den Gleichungen (2. 7)—(2. 9) ist das gleichbedeutend mit

$$g_{ik;m} \overset{\text{def}}{=} g_{ik}\|_r(\delta^r_m - \overset{*}{M}{}_o{}^r{}_m) - 2\overset{*}{M}_{(ik)m} = 0, \tag{2.11}$$

$$g_{ik}|_m \overset{\text{def}}{=} \partial_m g_{ik} - g_{ik}\|_r \overset{*}{L}{}_o{}^r{}_m - 2\overset{*}{L}_{(ik)m} = 0. \tag{2.12}$$

Diese beiden Gleichungen geben eine Relation für den symmetrischen Teil von $\overset{*}{M}_{ikm}$ und $\overset{*}{L}_{ikm}$. Bezeichnen wir mit $\mu_{ikm}$ den schiefsymmetrischen Teil von $\overset{*}{M}_{ikm}$ in $i, k$, so ist

$$\overset{*}{M}_{ikm} = \overset{*}{M}_{(ik)m} + \mu_{ikm}, \qquad \mu_{ikm} = \overset{*}{M}_{[ik]m}$$

und nach (2. 11) wird:

(2. 13) $$M^{*}_{ikm} = A_{ikr}(\delta^r_m - M^{*r}_{o\ m}) + \mu_{ikm},$$

wo

(2. 13a) $$A_{ikr} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} g_{ik}\|_r$$

den die Raumtorsion bestimmenden Tensor bedeutet. Überschiebt man (2. 13) mit $l^i$, so wird:

(2. 14) $$M^{*r}_{o\ m}(\delta^k_r + A_o{}^k{}_r) = A_o{}^k{}_r + \mu_o{}^k{}_r.$$

Wir nehmen noch an, daß die Gleichung

(2. 15) $$(\delta^k_r + A_o{}^k{}_r) J^t_k = \delta^t_r$$

für $J^t_k$ eindeutig lösbar ist. Die Bedingung dafür ist offenbar

$$\operatorname{Det}|\delta^k_r + A_o{}^k{}_r| \neq 0.$$

Auf Grund von (2. 15) kann aber $M^{*t}_{o\ m}$ aus (2. 14) nach einer Kontraktion mit $J^t_k$ leicht bestimmt werden; substituiert man dann diesen Wert in (2. 13), so wird

(2. 16) $$M^{*}_{ikm} = A_{ikr}(\delta^r_m - (A_o{}^t{}_m + \mu_o{}^t{}_m) J^r_t) + \mu_{ikm}.$$

Diese Formel bestimmt die allgemeinste Form für $M^{*}_{ikm}$ in $\mathfrak{L}_n$; doch ist der Tensor $\mu_{ikn}$, noch nicht ganz frei wählbar. Nach (2. 1a) und (2. 13) soll

(2. 16a) $$\mu_{iko} \equiv 0,$$

und nach (2. 3b) und (2. 16) wegen

$$M^{*}_{okm} = \overline{M}_{okm}, \qquad \delta^k_t - A_o{}^k{}_r J^r_t = J^k_t$$

soll auch die Relation

(2. 16b) $$(A_o{}^r{}_m + \mu_o{}^r{}_m) J^t_r (A_o{}^s{}_t + \mu_o{}^s{}_t) J^k_s = 0$$

bestehen. Das sind $n^2$ Gleichungen, und wegen der Schiefsymmetrie von $\mu_{ikm}$ in $i, k$ wird der Tensor $\mu_{ikm}$ insgesamt

$$N = \frac{1}{2} n^2(n-1) - n^2 = \frac{1}{2} n^2(n-3).$$

Komponenten haben, die noch frei wählbar sind, doch so, daß (2. 16a) bestehe. Für $n=3$ ist also z. B. $\mu_{ikm}$ schon — im allgemeinen Fall — auf Grund der Bedingungen (2. 16b) eindeutig festgelegt.

Jetzt gehen wir zur Bestimmung von $L^{*}_{ikm}$ über. Statt der Gleichung (2. 12) nehmen wir aber die mit (2. 12) äquivalente Relation:

(2. 17) $$\frac{1}{2} \partial_m g_{ik} - A_{ikr} L^{*r}_{o\ m} - L^{*}_{(ik)m} = 0.$$

Aus dieser Gleichung soll also $L^{*}_{ikm}$ bestimmt werden. Es kann leicht verifiziert werden, daß

$$(2.18)\qquad \Gamma^{*}_{ikm} = [ikm] - A_{ikr}\Gamma^{*r}_{o\ m} - A_{kmr}\Gamma^{*r}_{o\ i} + A_{imr}\Gamma^{*r}_{o\ k}$$

mit

$$[ikm] \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\partial_m g_{ik} + \partial_i g_{km} - \partial_k g_{im})$$

eine Lösung von (2. 17) ist, denn substituiert man statt $L^{*}_{ikm}$ die Größe $\Gamma^{*}_{ikm}$ in die Gleichung (2. 17), so wird (2. 17) identisch erfüllt sein. $\Gamma^{*}_{ikm}$ ist in $i, m$ symmetrisch; die allgemeinste Lösung von (2. 17) hat also die Form:

$$(2.19)\qquad L^{*}_{ikm} = \Gamma^{*}_{ikm} + \varLambda_{ikm},$$

wo aber $\varLambda_{ikm}$ einen solchen Tensor bedeutet, der so gewählt werden muß, daß die Relation (2. 17) erfüllt sei.

Für die vollständige Bestimmung der Übertragung muß noch $\Gamma^{*}_{ikm}$ durch $g_{ik}$ ausgedrückt, und die Form von $\varLambda_{ikm}$ bestimmt werden. Nach einer Überschiebung von (2. 18) mit $l^i$ wird:

$$(2.20)\qquad \Gamma^{*}_{ors}H^{rs}{}_{km} = [okm], \qquad [okm] \equiv [ikm]\,l^i,$$

wo

$$H^{rs}{}_{km} \overset{\text{def}}{=} \delta^r_k\delta^s_m + A_{ok}{}^r\delta^s_m + A_{km}{}^r l^s - A_{om}{}^r\delta^s_k$$

bedeutet. Existiert der inverse Tensor von $H^{rs}{}_{km}$, ist also die Gleichung

$$H^{rs}{}_{km}K^{km}{}_{pq} = \delta^r_p\delta^s_q$$

für $K^{km}{}_{pq}$ eindeutig lösbar — was wir im folgenden immer annehmen wollen — so wird nach (2. 20)

$$(2.21)\qquad \Gamma^{*}_{opq} = [okm]\,K^{km}{}_{pq}.$$

Setzt man jetzt diesen Wert von $\Gamma^{*}_{opq}$ in die Gleichung (2. 18) ein, so erhält man $\Gamma^{*}_{ikm}$ ausgedrückt durch den Grundtensor des Raumes.

Wir bestimmen jetzt die Form von $\varLambda_{ikm}$. Da $\Gamma^{*}_{ikm}$ eine Lösung von (2. 17) ist, d. h. $\Gamma^{*}_{ikm}$ eine metrische Übertragung bestimmt, so folgt aus den Formeln (2. 17) und (2. 19) für $\varLambda_{ikm}$ die Relation:

$$(2.22)\qquad \varLambda_{(ik)m} + A_{ikr}\varLambda_o{}^r{}_m = 0.$$

$\varLambda_{ikm}$ soll jetzt durch seinen in $i, k$ symmetrischen bezw. schiefsymmetrischen Teil dargestellt werden. Es ist

$$\varLambda_{ikm} = \varLambda_{(ik)m} + \sigma_{ikm}, \qquad \sigma_{ikm} = \varLambda_{[ik]m}$$

und nach (2. 22) wird:

$$\varLambda_{ikm} = -A_{ikr}\varLambda_o{}^r{}_m + \sigma_{ikm}.$$

Eine Überschiebung mit $l^i$ ergibt

$$A_o{}^r{}_m(\delta_r^k + A_o{}^k{}_r) = \sigma_o{}^k{}_m. \tag{2.23}$$

Auf Grund von (2.15) kann aus dieser Gleichung nach einer Überschiebung mit $J_k^t$ der Tensor $A_o{}^t{}_m$ bestimmt werden, und somit bekommt man auch $A_{ikm}$.

Die allgemeinste metrische Übertragung wird also nach (2.19) die Form

$$\overset{*}{L}_{ikm} = \overset{*}{\Gamma}_{ikm} - A_{ikr} J_t^r \sigma_o{}^t{}_m + \sigma_{ikm} \tag{2.24}$$

haben, wo $\overset{*}{\Gamma}_{ikm}$ durch (2.18) und (2.21) bestimmt ist, $\sigma_{ikm}$ aber einen in $i, k$ schiefsymmetrischen, noch frei wählbaren Tensor bedeutet.

Die Übertragung (2.18) ist im allgemeinen unter den Übertragungen (2.24) dadurch ausgezeichnet, daß sie in den Indizes $i, m$ symmetrisch ist. Aus der Forderung, daß $\overset{*}{L}_{ikm}$ in $i, m$ symmetrisch sei, folgt nämlich nach (2.24) auf Grund der Symmetrie von $\overset{*}{\Gamma}_{ikm}$ in $i, m$, daß:

$$\sigma_{[i|k|m]} - \sigma_o{}^t{}_{[m} A_{i]kr} J_t^r = 0 \tag{2.25}$$

besteht. Der Tensor $\sigma_{ikm}$ ist aber in $i, k$ schiefsymmetrisch, somit hat er $1/2\, n^2(n-1)$ Komponenten, während (2.25) aus $n^3$ Gleichungen besteht. Somit ist $\sigma_{ikm} = 0$ im allgemeinen die einzige Lösung von (2.25). Hat aber (2.25) außer $\sigma_{ikm} = 0$ auch andere Lösungen, dann existieren im Raum $\mathfrak{L}_n$ außer der durch (2.18) bestimmten Übertragung auch andere symmetrische Übertragungen.

Wäre die Übertragung auf die angegebene Weise nicht bestimmbar, wenn z. B. der Tensor $K^{km}{}_{pq}$ nicht eindeutig bestimmbar wäre, so könnte man auf folgende Weise verfahren.

Wir betrachten die durch (1.4) gegebene Funktion $F(x, v)$ als die Grundfunktion eines Finslerraumes, und bestimmen dann die Cartanschen Übertragungsparameter $\overset{(F)}{\overset{*}{\Gamma}}_{ikm}$. Selbstverständlich bestimmt $\overset{(F)}{\overset{*}{\Gamma}}_{ikm}$ bezüglich des metrischen Grundtensors $g_{ik}$ von $\mathfrak{L}_n$ eine nicht-metrische Übertragung. Mit der Methode von A. KAWAGUCHI können wir dann eine bezüglich $g_{ik}$ metrische Übertragung konstruieren (vgl. [11]). Wir setzen

$$\overset{*}{L}_{ikm} = \overset{(F)}{\overset{*}{\Gamma}}_{ikm} + \tau_{ikm}$$

und fordern, daß diese $\overset{*}{L}_{ikm}$ die Gleichung (2.17) befriedige. Das ergibt für $\tau_{(ik)m}$ die Relation:

$$\frac{1}{2}\partial_m g_{ik} - A_{ikr}(\overset{(F)}{\overset{*}{\Gamma}}{}_o{}^r{}_m + \tau_o{}^r{}_m) - (\overset{(F)}{\Gamma}_{(ik)m} + \tau_{(ik)m}) = 0.$$

Nun ist

$$\tau_{ikm} = \tau_{(ik)m} + \sigma_{ikm}, \qquad \sigma_{ikm} = \tau_{[ik]m},$$

somit hat man

$$\tau_{ikm}=\frac{1}{2}\partial_m g_{ik}-A_{ikr}(\overset{(F)}{\Gamma}{}^{*r}_{o\ m}+\tau_o{}^r{}_m)-\overset{(F)}{\Gamma}{}^{*}_{(ik)m}+\sigma_{ikm}.$$

Nach einer Überschiebung mit $l^i$ erhält man eine Gleichung für $\tau_o{}^r{}_m$, die auf Grund von (2. 15) lösbar ist. Somit erhält man $\tau_{ikm}$ und $L^{*}_{ikm}$ ausgedrückt mit $\sigma_{ikm}$ und mit dem Grundtensor $g_{ik}$ des Raumes $\mathfrak{L}_n$.

Zum Schluß dieses Paragraphen zeigen wir noch, daß die erste kovariante Ableitung des Einheitsvektors $l^i$ identisch verschwindet, wenn die Übertragungsparameter $L^{*}_{ikm}$ durch (2. 24) bestimmt sind. Wir werden im folgenden übrigens immer diesen Fall betrachten.

Nach (1. 5) und (1. 4) hat man in Hinsicht auf (2. 18)

$$\partial_r l^j=-l^j(\Gamma^{*}_{oor}+A_{ook}\Gamma^{*k}_{o\ r}).$$

Drücken wir jetzt $\Gamma^{*}_{ikr}$ nach (2. 19) mit $L^{*}_{ikr}$ aus, so wird:

$$\partial_r l^j=-l^j(L^{*}_{oor}+A_{ook}L^{*k}_{o\ r})+l^j A_o{}^k{}_r(l_k+A_{ook}).$$

Nach (2. 23) ist aber wegen der Schiefsymmetrie von $\sigma_{ikm}$ in $i, k$

$$A_o{}^k{}_r(l_k+A_{ook})=0,$$

somit ist

$$\partial_r l^j=-l^j(L^{*}_{oor}+A_{ook}L^{*k}_{o\ r}). \tag{2. 26}$$

Aus den Gleichungen (1. 4) und (1. 5) folgt noch unmittelbar die Formel

$$l^j\|_m=\delta^j_m-l^j(l_m+A_{oom}). \tag{2. 27}$$

Aus der Definitionsgleichung (2. 8) der ersten kovarianten Ableitung folgt nun auf Grund von (2. 26) und (2. 27)

$$l^j|_r=0 \tag{2. 28}$$

w. z. b. w. Die Gleichung (2. 28) besteht übrigens auch in den affinen Räumen; nur steht in jenen Räumen statt $l^i$ das Grundelement $v^i$ (vgl. [15] S. 13).

Auf Grund von (1. 4) kann auch leicht die Relation

$$F|_k=0 \tag{2. 29}$$

abgeleitet werden.

## § 3. Transformationsformeln der Grundgrößen.

In den vorigen Paragraphen haben wir die folgenden Grundgrößen in den allgemeinen metrischen Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ eingeführt: 1. den metrischen Grundtensor $g_{ik}$, 2. den Tensor $\mu_{ikm}$, 3. den Tensor $\sigma_{ikm}$. Der Tensor $g_{ik}$ bestimmt dabei die Metrik von $\mathfrak{L}_n$, während $\mu_{ikm}$ und $\sigma_{ikm}$ (die in $i, k$

schiefsymmetrisch sind) zusammen mit $g_{ik}$ die metrische Übertragung in $\mathfrak{L}_n$ bestimmen. Diese drei Tensoren betrachten wir als die Fundamentaltensoren von $\mathfrak{L}_n$, alle übrigen Größen von $\mathfrak{L}_n$ sollen also immer durch diese Tensoren ausgedrückt werden.

Die anderen Größen, die das invariante Differential im Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ festlegen, haben die folgenden Transformationsgesetze:

$M_j{}^i{}_k$, bzw. $\overline{M}_j{}^i{}_k$ sind Tensoren. Man kann nämlich die Formel (2. 1) als ein invariantes Differential eines affinzusammenhängenden Linienelementraumes betrachten, dann muß aber $M_j{}^i{}_k$ tensoriellen Charakter haben. (Vgl. [15] Gl. (1, 5) auf S. 8.) Aus demselben Grunde hat $L_j{}^i{}_k$ die folgende Transformationsformel (vgl. [15] Gl. (1, 6) auf S. 8):

$$(3.\ 1)\quad \overline{L}_j{}^i{}_k = L_r{}^s{}_t p_j^r \bar{p}_s^i p_k^t + \overline{M}_r{}^s{}_t p_j^r \bar{p}_s^i (\partial_{\bar{x}^m} p_k^t) \bar{p}_q^m l^q + (\partial_{\bar{x}^k} p_j^r) \bar{p}_r^i,\ p_j^r = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j},\ \bar{p}_s^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s}.$$

Aus den Formeln (2. 6a) und (2. 6b) folgt nach einer einfachen Rechnung, daß die Größen $L_j^{*}{}^i{}_k$ dieselben Transformationsformeln haben, wie die Übertragungparameter eines Riemannschen Raumes, d. h.

$$(3.\ 2)\qquad \overline{L}_j^{*}{}^i{}_k = L_r^{*}{}^s{}_t p_j^r \bar{p}_s^i p_k^t + \bar{p}_r^i \partial_{\bar{x}^k} p_j^r.$$

Aus der Gleichung (2. 24) folgt, da $\sigma_{ikm}$, $A_{ikm}$ und $J_t^r$ offensichtlich Tensoren sind, daß die Transformationsformel von $\Gamma_i^{*}{}^j{}_k$ mit der von $L_i^{*}{}^j{}_k$ übereinstimmt.

B e m e r k u n g 1. Der Tensorcharakter von $A_{ijk}$ folgt unmittelbar aus der Definitionsgleichung (2. 13a), da die Operation „$\|_r$“ eine tensorielle Operation ist.

B e m e r k u n g 2. Die Transformationsformeln (3. 1) und (3. 2) könnten selbstverständlich auch aus ihren Definitionsgleichungen (2. 24), (2. 6b) und (2. 10) bestimmt werden.

## § 4. Charakterisierung des Finslerschen Raumes.

Wir wollen in diesem Paragraphen dasjenige Problem näher untersuchen, wie die Finslerräume unter den allgemeinen Linienelementräumen gekennzeichnet sind. Wie wir schon in der Einleitung erwähnt haben, können die Finslerräume durch die Relation (0. 1) charakterisiert werden, wo die Funktion $F(x, v)$ durch (1. 4) angegeben ist. Wir werden aber statt der Bedingung (0. 1) eine einfachere Relation für die Charakterisierung des Finslerraumes unter den allgemeinen Räumen $\mathfrak{L}_n$ bestimmen.

Nach der Gleichung (1. 4) wird in $\mathfrak{L}_n$ allgemein

$$(4.\ 1)\qquad \frac{1}{2}\partial^2_{v^i v^k} F^2 = g_{ik} + v^r \partial_{v^i} g_{rk} + v^s \partial_{v^k} g_{si} + \frac{1}{2} v^r v^s \partial^2_{v^i v^k} g_{rs}$$

bestehen, da $g_{rs}$ in $r, s$ symmetrisch ist. Angenommen daß der betrachtete Raum $\mathfrak{L}_n$ ein Finslerraum ist, so bestehet auch (0. 1); nach den beiden Gleichungen (0. 1) und (4. 1) folgt aber, daß im Finslerraum die Gleichung

$$(4.2) \qquad v^r \partial_{v^i} g_{rk} + v^r \partial_{v^k} g_{ri} + \frac{1}{2} v^r v^s \partial^2_{v^i v^k} g_{rs} = 0$$

eine Identität ist. Beachten wir jetzt, daß $g_{ik}$ in den $v^i$ homogen von nullter Dimension ist, so folgt aus (4. 2) nach einer Überschiebung mit $v^k$ im Hinblick auf die Eulersche Relation:

$$v^r v^s \partial_{v^i} g_{rs} = 0.$$

Multipliziert man jetzt diese Gleichung mit 1/2 und differenziert man sie partiell nach $v^k$, so wird wegen der Symmetrie von $g_{rs}$:

$$(4.3) \qquad \frac{1}{2} v^r v^s \partial^2_{v^i v^k} g_{rs} + v^r \partial_{v^i} g_{rk} = 0.$$

Aus (4. 2) und (4. 3) folgt nun unmittelbar

$$(4.4) \qquad v^r \partial_{v^k} g_{ri} = 0.$$

Diese Relation ist kennzeichnend für den Finslerraum, da aus (4. 4) schon die Relation (0. 1) abgeleitet werden kann. Die Finslerräume können auch durch (4. 4) charakterisiert werden; die Formel (0. 1) kann man dann aus (1. 4) leicht beweisen. Diesen Weg befolgte E. CARTAN in seiner Arbeit [3]. Der von uns benützte Weg war eben die Umkehrung des Cartanschen Weges. Das war uns wegen der Gleichberechtigkeit der Gleichungen (0. 1) und (4. 4) möglich; beide Gleichungen charakterisieren also die Finslerräume unter den allgemeinen metrischen Linienelementräumen $\mathfrak{L}_n$.

## § 5. Autoparallele und extremale Kurven.

Eine Kurve $x^i = x^i(t)$ werden wir in einem allgemeinen Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ immer nur bezüglich einer einparametrigen Folge der Linienelemente $v^i(t)$ erklären (vgl. [10] § 2). Der Parameter $t$ wird als Bogenparameter bezeichnet, falls

$$g_{ik}(x(t), v(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 1$$

ist; nach der Gleichnung (1. 1) wird nämlich in diesem Falle

$$s_{1,2} = t_2 - t_1$$

bestehen. Im folgenden werden wir immer — wenn wir das Gegenteil nicht nachdrücklich bemerken — die Bogenlänge als Parameter wählen, und sie — wie gewöhnlich — mit $s$ bezeichnen.

Definition. *Der Kurve* $x^i = x^i(s)$ *ist bezüglich des Richtungsfeldes* $v^i(s)$ *eine quasiautoparallele Kurve, falls das invariante Differential des Tangentenvektors*

$$\xi^i = \frac{dx^i}{ds}$$

*verschwindet. Ist* $v^i = \xi^i$, *so wird* $x^i(s)$ *nur als autoparallele Kurve bezeichnet.*

Die Differentialgleichung der quasiautoparallelen Kurven ist also:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + M^{*i}_{j\ k}\frac{dx^j}{ds}\frac{\omega^k(d)}{ds} + L^{*i}_{j\ k}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{5.1}$$

Der Wert von $\frac{\omega^k(d)}{ds}$ ist nach der Angabe von $v^i(s)$ eindeutig bestimmt. $v^i(s)$ bestimmt nämlich nach (1.5) den Einheitsvektor $l^i(s)$; somit wird nach (2.2) und (2.10) die Formel von $\frac{\omega^k(d)}{ds}$ die Gestalt

$$\frac{\omega^k(d)}{ds} = (\delta^k_j + \overline{M}_{o\ j}^{\ k})\left(\frac{dl^j}{ds} + L^{*j}_{o\ r}\frac{dx^r}{ds}\right), \qquad \overline{M}_{o\ j}^{\ k} = M^{*k}_{o\ j} \tag{5.2}$$

haben.

Das Feld $v^i(s)$ kann z. B. durch eine natürliche geometrische Forderung festgelegt werden. Fordert man nämlich, daß das Richtungsfeld $v^i(s)$ längs der Kurve $x^i = x^i(s)$ eben mit der Richtung des Tangentenvektors $\xi^i(s)$ identisch sei, d. h.

$$\frac{dx^i}{ds} = l^i(s) = \xi^i(s)$$

bestehe, so ist das Richtungsfeld längs der Kurve $x^i = x^i(s)$ eindeutig bestimmt, und die Differentialgleichung der autoparallelen Kurven wird nach (5.1):

$$\frac{dl^i}{ds} + M^{*i}_{o\ k}\frac{\omega^k(d)}{ds} + L^{*i}_{o\ o} = 0, \qquad \frac{dl^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2}. \tag{5.3}$$

Aus der Gleichung (5.2) bekommt man aber nach einer Überschiebung mit $(\delta^j_k - M^{*i}_{o\ k})$ auf Grund der Gleichung (2.3a)

$$\frac{dl^i}{ds} + L^{*i}_{o\ o} = \frac{\omega^k(d)}{ds}(\delta^i_k - M^{*i}_{o\ k}), \tag{5.4}$$

und somit wird aus der Gleichungen (5.3) und (5.4):

$$\frac{\omega^i(d)}{ds} = 0. \tag{5.5}$$

Diese Gleichungen sind also die Differentialgleichungen der autoparallelen Kurven, falls $l^i = \xi^i$ besteht. Diese Gleichungen können noch in der äquivalenten Form

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+L^{*\,i}_{j\;k}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0 \tag{5.5a}$$

geschrieben werden, wie das nach einer Überschiebung von (5.2) mit $(\delta^i_k-\overline{M}_{\cdot j}{}^i{}_k)$ sofort verifiziert werden kann (vgl. [10] § 6).

* * *

Wir gehen jetzt zur Bestimmung der Differentialgleichung der extremalen Kurven über. Durch die Formel (1.1) ist die Bogenlänge einer Kurve bezüglich des Richtungsfeldes $v^i(s)$ festgelegt. Wir wollen jetzt das Richtungsfeld mit Hilfe der Kurve $x^i=x^i(s)$ längs dieser Kurve in der Form

$$v^i=v^i(x,x'),\quad x'^k=\frac{dx^k}{ds}$$

festlegen, wo der Strich jetzt und im folgenden die Ableitung nach dem Parameter $s$, also die Ableitung nach der Bogenlänge bezeichnet. Wegen der Wahl des Parameters hat man also

$$F(x,x')\overset{\text{def}}{=}\sqrt{g_{ij}(x,v(x,x'))x'^ix'^k}=1. \tag{5.6}$$

Definition. *Eine extremale Kurve, oder kurz Extremale des allgemeinen metrischen Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ ist die Lösungskurve des Variationsproblems:*

$$\delta\int_{s_0}^{s_1}F(x,x')ds=0,$$

*wo $F$ durch* (5.6) *angegeben ist.*

Die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen dieses Variationsproblems sind auf Grund von (5.6):

$$\xi^i\xi^j\left(\frac{1}{2}\partial_k g_{ij}+A_{ijr}\partial_k v^r\right)-\frac{d}{ds}\left(A_{ijr}(\partial_{x'^k}v^r)\xi^i\xi^j+\xi_k\right)=0,\quad \partial_{x'^k}=\frac{\partial}{\partial_{x'^k}}, \tag{5.7}$$

wo

$$\xi^i=x'^i=\frac{dx^i}{ds},\quad \xi_k=g_{ik}\xi^i$$

den Tangentenvektor der Extremale bedeutet.

Wir werden jetzt die Gleichung (5.7) umformen. Auf Grund der Definition des invarianten Differentials, bekommt man für den kovarianten Vektor $\xi_k$:

$$\frac{d\xi_k}{ds}=\frac{D\xi_k}{ds}+L^*_{kij}\xi^i\xi^j+M^*_{kij}\xi^i\frac{\omega^j(d)}{ds}. \tag{5.8}$$

Nach den Gleichungen (2.18) und (2.24) und wegen der Schiefsymmetrie des Tensors $\sigma_{ijk}$ in $i, j$ wird

$$\frac{1}{2}\xi^i\xi^j\partial_{\dot{x}^k}g_{ij} = (L^*_{ijk} + A_{ijr}J^r_t\sigma_o{}^t{}_k + A_{ijr}\Gamma^{*r}_{o\ k})\xi^i\xi^j. \tag{5.9}$$

Substituiert man die entsprechenden Werte aus (5.8) und (5.9) in die Gleichung (5.7), so bekommt man die allgemeinste Form der Differentialgleichungen der extremalen Kurven. Es wird:

$$\frac{D\xi_k}{ds} + [2L^*_{[k|i|j]} - A_{ijr}(J^r_t\sigma_o{}^t{}_k + \Gamma^{*r}_{o\ k} + \partial_k v^r)]\xi^i\xi^j + \tag{5.10}$$

$$+ M^*_{kij}\xi^i\frac{\omega^j(d)}{ds} + \frac{d}{ds}(A_{ijr}\xi^i\xi^j\partial_{\dot{x}^k}v^r) = 0, \quad \xi_k = g_{ik}\frac{dx^i}{ds}.$$

Wir werden zwei Spezialfälle näher betrachten. Im Falle $A$ nehmen wir an, daß das Richtungsfeld $v^i$ allein von $x^i$ abhängig ist. Im Falle $B$ nehmen wir an, daß das Richtungsfeld $v^i$ mit dem Richtungsfeld des Tangentenvektors $\xi^i(s)$ zusammenfällt.

*Der Fall A.* Unsere Annahme ist also in diesem Falle, daß

$$v^i = v^i(x)$$

ein allein wom Orte abhängiger Vektor ist. Da wegen der Wahl des Parameters längs der Extremale $v^i = l^i$ ist, kann

$$\nabla_k v^r \overset{\text{def}}{=} \partial_k v^r + \Gamma^{*r}_{j\ k}v^j = \partial_k v^r + \Gamma^{*r}_{o\ k}$$

gesetzt werden. Nach der Transformationsformel (3.2) folgt unmittelbar, daß $\nabla_k v^r$ einen Tensor bestimmt. Die Operation „$\nabla_k$" kann übrigens als ein Spezialfall der kovarianten Ableitung (2.8) betrachtet werden; denn aus (2.8) erhält man eben die genannte Operation, wenn statt der Übertragungsparameter $L^*_{ijk}$ die Übertragungsparameter $\Gamma^*_{ijk}$ genommen werden. Nach (2.24) ist also die Operation „$\nabla_k$" eine kovariante Ableitung, für die $\sigma_{ijk} = 0$ gilt.

Die Differentialgleichung der Extremalen wird nach (5.10) in diesem Falle die Form:

$$\frac{D\xi_k}{ds} + [2L^*_{[k|i|j]} - A_{ijr}(J^r_t\sigma_o{}^t{}_k + \nabla_k v^r)]\xi^i\xi^j + M^*_{kij}\xi^i\frac{\omega^j(d)}{ds} = 0.$$

haben. Wir bemerken hier, daß diese Gleichung formal auch die von J. G. Freeman bestimmte in sich enthält (vgl. [9] Gleichung (4.2)). Analog den autoparallelen Kurven können die durch (5.10) bestimmten Kurven *Quasiextremalen* bezeichnet werden, während die *Extremalen* durch $v^i = x'^i$ charakterisiert sind.

*Der Fall B.* Dieser Fall ist durch die Relation

$$\eta^i = \xi^i = x'^i = l^i \tag{5.11}$$

charakterisiert. Aus (5.10) bekommt man nach Heraufziehen des Indexes $k$ wegen (5.11):

$$\frac{\omega^j(d)}{ds}(\delta_j^k + M^{*k}{}_{oj}) + 2L^{*[k|o|o]} - A_{oor}(J_t^r \sigma_o{}^{tk} + \Gamma^{*ork}) + g^{jk}\frac{dA_{ooj}}{ds} = 0.$$

Drückt man jetzt $\dfrac{dA_{ooj}}{ds}$ mit Hilfe des invarianten Differentials aus, ebenso, wie vorher $\dfrac{d\xi_k}{ds}$ mittels (5.8) bestimmt wurde, so wird:

$$\begin{aligned}\frac{\omega^j(d)}{ds}(\delta_j^k + M^{*k}{}_{oj} + M^{*kr}{}_j A_{oor}) + 2L^{*[k|o|o]} + \\ + A_{oor}(L^{*kro} - J_t^r \sigma_o{}^{tk} - \Gamma^{*ork}) + \frac{DA^{ook}}{ds} = 0.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Im Falle $\sigma_{ijk} = 0$, also für eine symmetrische Übertragung hat (5.12) die einfache Form:

$$\frac{\omega^j(d)}{ds}(\delta_j^k + M^{*k}{}_{oj} + M^{*kr}{}_j A_{oor}) + \frac{DA^{ook}}{ds} = 0. \tag{5.12a}$$

Es kann leicht verifiziert werden, daß diese Gleichung die unmittelbare Verallgemeinerung der in unserem Aufsatz [10] für die Extremalen abgeleiteten Differentialgleichung ist (vgl. (6.12) von [10]). Um die Differentialgleichung (6.12) von [10] zu erhalten, müßte man in (5.12a) für die Übertragungsparameter $M^*_{ijk}$ bzw. für den Torsionstensor $A_{ijk}$ die Bedingungen

$$M^*_{ijk} = A_{ijk}, \qquad A_{ojk} = p\, l_j A_k$$

stellen und dann (5.12a) für $\dfrac{\omega^k(d)}{ds}$ auflösen.

Im Falle $\sigma_{ijk} = 0$ wollen wir noch die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für $\mathfrak{L}_n$ angeben, daß die autoparallelen Kurven $C_n$ gleichzeitig Extremalen seien. Nach (5.5) und (5.12a) soll offenbar $\dfrac{DA^{ook}}{ds} = 0$ längs jeder autoparallelen Kurve bestehen. Beachtet man, daß nach unserer Forderung $\dfrac{\omega^j(d)}{ds} = 0$ die einzige Lösung von (5.12a) sein soll, so kann folgendes Theorem behauptet werden:

Theorem A. *Ist $\sigma_{ijk}=0$, und ist $v^i=x'^i$, so sind die autoparallelen Kurven $C_a$ des Raumes $\mathfrak{L}_n$ mit den Extremalen identisch, falls die Relationen*

$$\operatorname{Det}|\delta_j^k + M^{*k}{}_{oj} + M^{*kr}{}_j A_{oor}| \neq 0, \quad \frac{DA^{ook}}{ds}=0$$

*längs $C_a$ bestehen.*

## § 6. Beispiele.

In diesem Paragraphen wollen wir durch einige Beispiele die Erfüllbarkeit der gestellten Bedingungen beweisen.

*A*) Der Fall des Finslerschen Raumes.* Wie im § 4. gezeigt wurde, kann dieser Fall durch (4. 4) charakterisiert werden. Die durch (2. 16) und (2. 24) bestimmte Übertragung ist aber eine Verallgemeinerung der Cartanschen Übertragung. Auf Grund von (4. 4) ist nach (2. 15) $J_k^t=\delta_k^t$; somit erhält man für die Übertragungsparameter folgende Relationen:

$$M^{*}_{ikm}=A_{ikr}(\delta^r_m-\mu_o{}^r{}_m)+\mu_{ikm}, \quad L^{*}_{ikm}=\Gamma^{*}_{ikm}-A_{ikr}\sigma_o{}^r{}_m+\sigma_{ikm}. \tag{6. 1}$$

Aus (2. 16b) erhält man für $\mu_{orm}$ eine Gleichung, die etwa durch die Forderung

$$\mu_{irm}=h_{[i}l_{r]}k_m$$

erfüllbar ist, wenn $h_i, k_m, l_r$ drei aufeinander orthogonale Vektoren bestimmen. Möglicherweise kann statt des Vektors $l_t$ auch $k_t$ gesetzt werden; dann wird $\mu_{orm}=0$ bestehen.

*B*) Der Fall $A_o{}^i{}_k=pl^iA_k$.* Die symmetrische Übertragung ist in [10] in diesem Falle ausführlich behandelt. Wir verweisen noch darauf, daß dieser Fall formal mit der von J. A. Schouten und J. Haantjes zuerst entwickelten Geometrie (vgl. [13] und [5]) übereinstimmt. Im folgenden wollen wir in erster Reihe die Abweichung dieser Übertragung vom symmetrischen Fall angeben.

Aus der Gleichung (2. 15) folgt, daß $J_k^t$ die Form

$$J_k^t=\delta_k^t-pl^tA_k\equiv\delta_k^t-A_o{}^t{}_k$$

hat. Die Übertragungsparameter erhält man aus (2. 16) und (2. 24) wieder in der Form (6. 1). Für den Tensor $\mu_{ikm}$ ergibt aber die Relation (2. 16b) $n^2$ Bedingungsgleichungen, wie im allgemeinen Fall.

Für $L^{*}_{ijk}$ ist der in $i, k$ symmetrische Fall im allgemeinen durch $\sigma_{ijk}=0$ charakterisiert. Die explizite Form der symmetrischen Übertragungsparameter kann nach der Methode von [10] berechnet werden (vgl. [10] (3, 15)—(3, 22)].

Es ist

$$\Gamma^{*}_{ijk} = [ijk] - \langle A_{ijm} \{{}_{o}{}^{s}{}_{r}\} [(\delta^r_k - l^r l_k)\delta^m_s + \\ + K^t_q (l^r g_{st} + p\delta^r_t A_s)(l_k g^{mq} - A_k{}^{mq})] \rangle - \langle ijk \rangle, \tag{6.2}$$

wo $\langle ijk \rangle$ noch zwei weitere Glieder mit zyklischer Permutation von $i, j, k$ bedeutet, in denen aber vor dem letzten Glied auch das Vorzeichen noch geändert ist. Der Tensor $K^t_q$ ist durch die Relationen

$$(\delta^r_t + pA_s A_t{}^{sr}) K^t_q = \delta^r_q$$

festgelegt.

*C*) Der Fall* $\mu_o{}^k{}_m = 0$. Wählt man für $\mu_i{}^k{}_m$ einen Tensor für den $\mu_o{}^k{}_m = 0$ besteht, so ergibt (2.16b) eine Bedingung für den Tensor $A_o{}^r{}_m$. Wenn

$$J^k_r \varphi^p_k = \delta^p_r$$

für den Tensor $\varphi^p_t$ lösbar ist, so daß

$$\mathrm{Det}\,|J^t_r| \neq 0$$

besteht, erhält man aus (2.16b) nach einer Überschiebung mit $\varphi^p_t$ die Formel

$$A_o{}^r{}_m J^t_r A_o{}^p{}_t = 0.$$

Diese Formel ergibt mit (2.16) zusammen:

$$M^{*k}_o{}_m = A_o{}^k{}_m,$$

wie man das nach einer Kontraktion von (2.16) mit $l^i$ sofort verifizieren kann. Die Bedingung (2.3b) wird somit nach $M^{*k}_o{}_m = \bar{M}_o{}^k{}_m$ mit

$$A_o{}^i{}_r A_o{}^r{}_k = 0$$

äquivalent.

*D*) Der Fall* $M^{*k}_o{}_m = l^k A_m$. Es wird auf Grund von (2.14)

$$l^k A_m \equiv M^{*k}_o{}_m = A_o{}^k{}_m + \mu_o{}^k{}_m. \tag{6.3}$$

Nach einer Überschiebung mit $l_k$ wird im Hinblick auf die Schiefsymmetrie von $\mu_{ikm}$ in den Indizes $i, k$:

$$A_m = A_{oom}. \tag{6.4}$$

Nach der Gleichung (2.13) erhält man wegen der speziellen Form des Tensors $M^{*k}_o{}_m$:

$$M^{*}_{ikm} = A_{ikm} + \mu_{ikm} \tag{6.5}$$

Auf Grund von (6.3) und (6.4) könnte für $\mu_{ikm}$ etwa die Formel

$$\mu_{ikm} = 2 l_{[k} A_{|o|i]m} \tag{6.6}$$

gewählt werden. Die Bedingung (2.3b) ist wegen $\bar{M}_o{}^j{}_i = M^{*j}_o{}_i$ und auf Grund von (6.5) und (6.6) identisch erfüllt.

## § 7. Bestimmung der Torsion und der Krümmung des Raumes.

Die Torsions- und die Krümmungstensoren des Raumes werden wir mit Hilfe der Cartanschen $\omega$-Symbolik der äußeren Produkte und der äußeren Ableitungen Pfaffscher Formen bestimmen (vgl. [4] Chap. VIII, [1] S. 209—210).[4]) Die Theorie der Pfaffschen Formen setzen wir als bekannt voraus.

Die Torsionstensoren des metrischen Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ können nach der Cartanschen Methode durch Berechnung der Pfaffschen Form:

(7. 1) $$\Omega^i \overset{\text{def}}{=} (\varDelta D - D\varDelta)x^i$$

berechnet werden, wo „$d$" und „$\delta$" die zur invarianten Differentiale „$D$" und „$\varDelta$" gehörigen vertauschbaren Differentialen bedeuten. Da $x^i$ ein Skalar ist, wird $Dx^i = dx^i$ bestehen; somit bekommt man aus (7. 1) und (2. 4)

(7. 2a) $$\Omega^i = [dx^t \omega_t{}^i(d)],$$

oder in ausführlicher Form nach (2. 5) wird:

(7. 2b) $$\Omega^i = M_j^{*}{}^i{}_k [dx^j \omega^k] + \Omega_j^{*}{}^i{}_k [dx^j dx^k],$$

wo

(7. 3) $$\Omega_j^{*}{}^i{}_k = L^{*}_{[j}{}^i{}_{k]}$$

bedeutet. Der Tensor $M_j^{*}{}^i{}_k$ ist der Tensor der Raumtorsion; den Tensor $\Omega_j^{*}{}^i{}_k$ bezeichnen wir auf Grund der Gleichung (7. 3) als den Tensor der Übertragungstorsion. Der Tensor $M_j^{*}{}^i{}_k$ bestimmt nämlich nach (2. 16) für $\mu_{ikm} = 0$, die Abweichung des Raumes $\mathfrak{L}_n$ von einem Riemannschen Raum. In einem Riemannschen Raum ist nämlich $A_{ikr} = 0$; somit verschwindet auch $M_j^{*}{}^i{}_k$. Die Relation (7. 3) zeigt, daß der Tensor $\Omega_j^{*}{}^i{}_k$ die Abweichung der Übertragung vom symmetrischen Fall charakterisiert.

Die Krümmungstensoren des metrischen Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ kann man durch Berechnung der Formel

$$(\varDelta D - D\varDelta)\xi^i = \Omega_j{}^i(d, \delta)\xi^j$$

bestimmen, wo nach (2. 4)

(7. 4) $$\Omega_j{}^i \overset{\text{def}}{=} [\Omega_j{}^k \omega_k{}^i] - (\omega_j{}^i)'$$

ist. Bei der ausführlichen Berechnung von $\Omega_j{}^i$ muß die Homogenität nullter Ordnung der Größen in den $v^i$, die Formel:

$$dQ{:}{:}. = (\partial_t Q{:}{:}. - Q{:}{:}.\|_m L_o^{*}{}^m{}_t)dx^t + Q{:}{:}.\|_m(\delta_t^m - M_o^{*}{}^m{}_t)\omega^t(d)$$

— die für jede Größe $Q{:}{:}.$ besteht, wenn $Q{:}{:}.$ in den $v^i$ homogen von nullter Dimension ist — beachtet werden, weiter muß man bei der Bestimmung

---

[4]) [1] gibt nur eine kurze Zusammenfassung der Theorie der Pfaffschen Formen, die aber für unsere Untersuchungen schon hinreichend ist. (Vgl. [1] § 9.)

des vollständigen Krümmungstensors (2. 26) und (2. 27) anwenden, und die Identitäten

$$\omega^o = 0, \quad M_o^{*r}{}_m (l_r + A_{oor}) = A_{oom}$$

benützen. Der erste dieser beiden letzten Identitäten folgt offenbar aus der Definition von $\omega^i$ im Hinblick auf die Relation: $Dg_{ik} = 0$, während die zweite aus (2. 14) nach Überschiebung mit $l_k$ unmittelbar verifiziert werden kann:

Es wird somit:

$$\Omega_j{}^i = \frac{1}{2} R_j{}^i{}_{ts}[dx^t dx^s] + P_j{}^i{}_{ts}[dx^t \omega^s] + \frac{1}{2} \bar{S}_j{}^i{}_{ts}[\omega^t \omega^s], \tag{7.5}$$

wo

$$R_j{}^i{}_{ts} \overset{\text{def}}{=} \bar{R}_j{}^i{}_{ts} + M_j^{*i}{}_r(\delta^r_p + M_o^{*r}{}_p)\bar{R}_o{}^p{}_{ts} \tag{7.6}$$

mit

$$\frac{1}{2}\bar{R}_j{}^i{}_{ts} \overset{\text{def}}{=} \partial_{[s} \overset{*}{L}_{|j|}{}^i{}_{t]} - L_o^{*m}{}_{[s} \overset{*}{L}_{|j|}{}^i{}_{t]}\|_m + \overset{*}{L}_m{}^i{}_{[s} \overset{*}{L}_{|j|}{}^m{}_{t]}, \tag{7.7}$$

$$P_j{}^i{}_{ts} \overset{\text{def}}{=} L_j^{*i}{}_t\|_m(\delta^m_s - M_o^{*m}{}_s) - M_j^{*i}{}_s|_t - M_j^{*i}{}_r(M_o^{*r}{}_p|_t - L_k^{*m}{}_t\|_p l^k(\delta^r_m + \\ + M_o^{*r}{}_m))(\delta^p_s - M_o^{*p}{}_s), \tag{7.8}$$

$$\frac{1}{2}\bar{S}_j{}^i{}_{ts} \overset{\text{def}}{=} M_j^{*i}{}_{[t}\|_{|r|}(\delta^r_{s]} - \overset{*}{M}_{|o|}{}^r{}_{s]}) - M_j^{*i}{}_r M_o^{*r}{}_q\|_p(\delta^p_{[t} - M_o^{*p}{}_{[t})(\delta^q_{s]} - \overset{*}{M}_{|o|}{}^q{}_{s]}) + \\ + M_j^{*m}{}_{[t} \overset{*}{M}_{|m|}{}^i{}_{s]} \tag{7.9}$$

bezeichnet. $R_j{}^i{}_{ts}$ ist der vollständige Riemannsche Krümmungstensor, $\bar{R}_j{}^i{}_{ts}$ der Hauptkrümmungstensor des Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$. Beide Krümmungstensoren, zusammen mit $\bar{S}_j{}^i{}_{ts}$ sind in $t, s$ schiefsymmetrisch.

Auf Grund der Identität:

$$(\Delta D - D\Delta) g_{ik} \equiv -2\Omega_{(ik)} = 0$$

folgt, daß die Krümmungstensoren (7. 6), (7. 8) und (7. 9) in den ersten beiden Indizes schiefsymmetrisch sind. Die Formel (7. 5) bestimmt die Krümmungstensoren wegen $\omega^o = 0$ nicht eindeutig. Durch die Forderung

$$P_j{}^i{}_{to} = 0, \tag{7.8a}$$

$$\bar{S}_j{}^i{}_{to} = 0 \tag{7.8b}$$

wird die Zerlegung (7. 5) eindeutig. Nach (2. 1a) und (2. 28) folgt, daß (7. 8a) erfüllt ist. Für den Tensor $\bar{S}_j{}^i{}_{to}$ erhält man aber nach (2. 27):

$$\bar{S}_j{}^i{}_{to} = M_j^{*i}{}_t.$$

Für die Eindeutigkeit der Zerlegung (7. 5) müßte man also statt des Tensors (7. 9) den Tensor

$$S_j{}^i{}_{ts} \overset{\text{def}}{=} \bar{S}_j{}^i{}_{ts} - 2M_j^{*i}{}_{[t} l_{s]}$$

einführen.

*Wir zeigen noch, daß der vollständige Riemannsche Krümmungstensor und der Hauptkrümmungstensor miteinander gleichwertig sind.*

Da aus $\bar{R}_j{}^i{}_{ts}$ nach (7.6) der Tensor $R_j{}^i{}_{ts}$ bestimmbar ist, müssen wir noch zeigen, daß auch $R_j{}^i{}_{ts}$ den Tensor $\bar{R}_j{}^i{}_{ts}$ bestimmt. Überschiebt man die Relation (7.6) mit

$$l^j(\delta_i^k - M_o^{*k}{}_i),$$

so wird nach (2.3b):

$$\bar{R}_o{}^k{}_{ts} = R_o{}^m{}_{ts}(\delta_m^k - M_o^{*k}{}_m).$$

Substituiert man das in (7.6), so wird

$$\bar{R}_j{}^i{}_{ts} = R_j{}^i{}_{ts} - M_j^{*i}{}_m R_o{}^m{}_{ts}, \tag{7.10}$$

und das beweist unsere Behauptung.

## § 8. Bianchische Identitäten der Krümmungstensoren.

Bei der Untersuchung der Bewegungsgruppen von $\mathfrak{L}_n$ werden wir die Bianchischen Identitäten der Krümmungstensoren (7.6) und (7.7) benötigen. Wir können ebenso verfahren, wie E. CARTAN im Riemannschen, bzw. im Finslerschen Raum verfuhr (vgl. [3], [4]).

Bilden wir die äußere Ableitung von (7.2b), so wird im Hinblick auf (7.4):

$$(\Omega^i)' - [dx^t \Omega_t{}^i] + [\omega_t{}^i \Omega^t] = 0. \tag{8.1}$$

Bilden wir jetzt die äußere Ableitung von (7.4), so wird:

$$(\Omega_j{}^i)' + [\omega_k{}^i \Omega_j{}^k] - [\omega_j{}^k \Omega_k{}^i] = 0. \tag{8.2}$$

Aus den Identitäten (8.1) und (8.2) erhält man die Bianchischen Identitäten für den vollständigen Riemannschen Krümmungstensor nach einer Substitution $\omega^k = 0$. In tensorieller Form geschrieben wird:

$$\frac{1}{2}(R_m{}^i{}_{jk} - M_m^{*i}{}_t R_o{}^t{}_{jk}) - \Omega_j^{*i}{}_k|_m - 2\Omega_t^{*i}{}_k \Omega_j^{*t}{}_m + \{\text{zykl.}\}_{mjk} = 0, \tag{8.3}$$

$$R_j{}^i{}_{km}|_r + P_j{}^i{}_{kt} R_o{}^t{}_{mr} + 2R_j{}^i{}_{kt}\Omega_m^{*t}{}_r + \{\text{zykl.}\}_{kmr} = 0, \tag{8.4}$$

wo $\{\text{zykl.}\}_{mjk}$ die zyklische Permutation der Indizes $m, j, k$ bedeutet und $\Omega_j^{*i}{}_k$ durch (7.3) angegeben ist.

Die Bianchischen Identitäten des Hauptkrümmungstensors (7.7) können mit Hilfe gewisser Vertauschungsformeln abgeleitet werden. Die Methode, die wir anwenden wollen, hat für den Cartanschen Raum E. T. DAVIES entwickelt (vgl. [6] S. 24).

Ist $\zeta_i(x, v)$ ein kovarianter Vektor in $\mathfrak{L}_n$, so sind für $\zeta_i$ *die Identitäten von Ricci:*

$$2\zeta_i|_{[j|k]} = -\zeta_r \bar{R}_i{}^r{}_{jk} - \zeta_i||_r \bar{R}_o{}^r{}_{jk} - 2\zeta_i|_r \Omega_j^{*r}{}_k. \tag{8.5}$$

Offenbar kann man die Identitäten von Ricci auch auf beliebigen Tensoren erweitern. Nach einer kleinen Rechnung kann die Vertauschungsformel

$$\zeta_i|_k\|_m - \zeta_i\|_m|_k = -\zeta_r \overset{*}{L}{}_i{}^r{}_k\|_m - \zeta_i\|_r \overset{*}{L}{}_s{}^r{}_k\|_m l^s \tag{8.6}$$

leicht verifiziert werden. Differenziert man jetzt (8. 5) kovariant nach $x^l$, permutiert man dann die Indizes $j, k, l$ zyklisch, beachtet man noch (8. 6) und die Identitäten von Ricci für den Tensor $\zeta_i|_j$, so wird im Hinblick auf (8. 3) und (7. 10)

$$\zeta_r(\overline{R}_i{}^r{}_{jk}|_l + \overset{*}{L}{}_i{}^r{}_j\|_t \overline{R}_o{}^t{}_{kl} + 2\overline{R}_i{}^r{}_{jt}\overset{*}{\Omega}{}_k{}^t{}_l + \{\text{zykl.}\}_{jkl}) +$$
$$+ \zeta_i\|_r(\overline{R}_o{}^r{}_{jk}|_l + \overset{*}{L}{}_s{}^r{}_j\|_t l^s \overline{R}_o{}^t{}_{kl} + 2\overline{R}_o{}^r{}_{jt}\overset{*}{\Omega}{}_k{}^t{}_l + \{\text{zykl.}\}_{jkl}) = 0.$$

Da $\zeta_r$ in dieser Formel beliebig gewählt werden kann, hat man:

$$\overline{R}_i{}^r{}_{jk}|_l + \overset{*}{L}{}_i{}^r{}_j\|_t \overline{R}_o{}^t{}_{kl} + 2\overline{R}_i{}^r{}_{jt}\overset{*}{\Omega}{}_k{}^t{}_l + \{\text{zykl.}\}_{jkl} = 0. \tag{8.7}$$

Diese Gleichungen sind die Bianchischen Identitäten für den Hauptkrümmungstensor $\overline{R}_i{}^j{}_{kl}$. Wir bemerken noch, daß auf Grund von (7. 10) im wesentlichen auch die Identitäten (8. 3) für den Hauptkrümmungstensor bestehen.

## II. TEIL. UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE BEWEGUNGSGRUPPEN DER ALLGEMEINEN METRISCHEN LINIENELEMENTRÄUME.

### § 9. Infinitesimale Transformationen. Liesche Ableitung.

Die Transformation

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x)\delta t \tag{9.1}$$

nennt man eine infinitesimale Transformation, falls $\delta t$ infinitesimal ist. Für Linienelemente $(x, v)$ bestimmt (9. 1) auf Grund der Transformationsformel

$$\bar{v}^i = v^r \partial_r \bar{x}^i$$

der Linienelemente eine Transformationsformel von der Form:

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x)\delta t, \quad \bar{v}^i = v^i + v^r \partial_r \xi^i \delta t. \tag{9.2}$$

In unserem Raum $\mathfrak{L}_n$ bedeutet eine Transformation der Grundelemente immer die erweiterte Transformation (9. 2).

Die Liesche Ableitung eines geometrischen Objektums $\Omega$ bezüglich der Transformationsformel (9. 2) ist durch

$$\Delta\Omega = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\Omega(\bar{x}, \bar{v}) - \overline{\Omega}(\bar{x}, \bar{v})}{\delta t} \tag{9.3}$$

bestimmt (vgl. etwa [14] S. 76). Die Liesche Ableitung eines kovarianten

Vektors $\eta_i$ bekommt man in tensorieller Form, wenn man die Größen $\partial_k \eta_i$ und $\partial_k \xi^i$ nach (2.8) mit Hilfe der ersten kovarianten Ableitung ausdrückt. Es ist

$$\Delta \eta_i = \eta_i|_m \xi^m + \eta_i\|_m (\xi^m|_o - 2\Omega^{*m}_{t\ \ o}\xi^t) + \eta_m (\xi^m|_i - 2\Omega^{*m}_{t\ \ i}\xi^t).$$

Für einen allgemeinen Tensor $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ hat man:

$$\Delta T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}|_m \xi^m + T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}\|_m (\xi^m|_o - 2\Omega^{*m}_{t\ \ o}\xi^t) - \tag{9.4}$$
$$- \sum_k T^{i_1 \dots i_{k-1} m i_{k+1} \dots i_r}_{j_1 \dots \dots \dots \dots j_s} (\xi^{i_k}|_m - 2\Omega^{*i_k}_{t\ \ m}\xi^t) + \sum_k T^{i_1 \dots \dots \dots \dots i_r}_{j_1 \dots j_{k-1} m j_{k+1} \dots j_s} (\xi^m|_{j_k} - 2\Omega^{*m}_{t\ \ j_k}\xi^t).$$

Ist die Übertragung symmetrisch, so erhält man aus (9.4) eben die Formel (4.1) von [14]. Das zeigt unmittelbar, daß die Formel (9.4) nicht nur in den metrischen Räumen gültig ist, sondern auch in den allgemeinen nicht-symmetrischen affinzusammenhängenden Räumen besteht.

Wir werden noch die Liesche Ableitung der Übertragungsparameter $L^{*j}_{i\ \ k}$ benötigen. Nach der Transformationsformel (3.2) von $L^{*j}_{i\ \ k}$ ergibt (9.3) die Formel:

$$\Delta L^{*j}_{i\ \ k} = \xi^j|_i|_k + \bar{R}^{\ j}_{i\ \ kr}\xi^r + L^{*j}_{i\ \ k}\|_r (\xi^r|_o + 2\Omega^{*r}_{o\ \ t}\xi^t) + 2\Omega^{*j}_{i\ \ r}\xi^r|_k + 2\Omega^{*j}_{i\ \ r}|_k \xi^r. \tag{9.5}$$

Offenbar ist auch diese Formel die Verallgemeinerung des symmetrischen Falles (wir haben nämlich die metrischen Eigenschaften der Übertragung nicht benützt)[5]).

## § 10. Die Bewegungsgruppe und deren Integrabilitätsbedingungen.

Eine Bewegung im metrischen Linienelementraume $\mathfrak{L}_n$ bedeutet eine Punkttransformation, der die Bogenlänge aller Kurven invariant läßt; dabei verstehen wir jetzt unter Kurve eine einparametrige Folge $(x^i(t), v^i(t))$ der Linienelemente, für die

$$\frac{dx^i}{dt} = \varrho(t)\, v^i(t)$$

besteht. ($t$ bedeutet hier einen allgemeinen Parameter.) Da nach der Formel (1.1)

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{ik}(x, \dot{x})\dot{x}^i\dot{x}^k, \qquad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$$

besteht, ist $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ bei einer Bewegung eine Invariante. Ist also die infinite-

[5]) Gy. Soós hat die Liesche Ableitung in einer noch nicht veröffentlichten Arbeit für sehr allgemeine Räume, sog. $\omega$-Räume behandelt. (Gy. Soós, Über die geometrischen Objekte allgemeiner differentialgeometrischer Räume. I, II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* im Erscheinen).

simale Transformation (9. 1) eine Bewegung, dann ist

$$\dot{\bar{s}}^2-\dot{s}^2=0.$$

Ebenso wie in einem Finslerraum erhält man aus dieser Gleichung mit der Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\delta t$ (vgl. [12] S. 556—557):

$$g_{rk}\partial_i\xi^r+g_{ir}\partial_k\xi^r+\xi^r\partial_r g_{ik}+g_{ik}\|_m l^r\partial_r\xi^m=0.$$

Nach der Gleichung (9. 3) oder (9. 4) kann leicht verifiziert werden, daß unsere letzte Formel mit

(10. 1) $$\varDelta g_{ik}=0$$

identisch ist. Nach (9. 4) ist (10. 1) wegen $g_{ik}|_m=0$ mit

(10. 2) $$\xi_{(i|k)}+A_{ikm}(\xi^m|_o-2\Omega_t^{*m}{}_o\xi^t)-2\Omega^*_{t(ik)}\xi^t=0,\quad \xi_i=g_{ik}\xi^k$$

äquivalent[6]). Diese Gleichungen sind die Killingschen Gleichungen in $\mathfrak{L}_n$.

Bestimmt also eine infinitesimale Transformation (9. 1) eine Bewegung im Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$, so befriedigt der Vektor $\xi^i(x)$ das Differentialgleichungssystem (10. 2).

Um die Integrabilitätsbedingungen von (10. 1) bestimmen zu können, benötigen wir noch zwei Vertauschungsformeln, undzwar

(10. 3) $$\varDelta(\eta_{ij}|_k)-(\varDelta\eta_{ij})|_k=-\eta_{ir}\varDelta L_j^{*r}{}_k-\eta_{rj}\varDelta L_i^{*r}{}_k-\eta_{ij}\|_r l^t\varDelta L_t^{*r}{}_k$$

und

(10. 4) $$\partial_{\dot{k}}\varDelta\eta_{ij}-\varDelta\partial_{\dot{k}}\eta_{ij}\equiv 0,$$

wo $\eta_{ij}$ einen beliebigen kovarianten Tensor zweiter Stufe bedeuten kann. Die Identität (10. 3) erhält man bei der Beachtung von (9. 4), im Hinblick auf die Identitäten von Ricci und nach der Formel (9. 5). Die Identitäten von Ricci müssen selbstverständlich für einen Tensor zweiter Stufe angewandt werden; die Relation (8. 5) ergibt sie nämlich bloß für einen Vektor, die Verallgemeinerung bietet aber keine Schwierigkeiten. Ebenso müssen wir noch die Analoga der Vertauschungsformeln (8. 6) für $\eta_{ij}$ benützen. Die Formel (10. 4) bekommt man unmittelbar, wenn $\varDelta\eta_{ij}$ auf Grund von (9. 3) in der Form:

$$\varDelta\eta_{ij}=\xi^r\partial_r\eta_{ij}+v^r\partial_r\xi^m\partial_{\dot{m}}\eta_{ij}+\eta_{rj}\partial_i\xi^r+\eta_{ir}\partial_j\xi^r$$

benützt wird. Wir bemerken noch, daß die Formeln (10. 3) und (10. 4) auf beliebige Tensoren erweitert werden können.

Jetzt können wir schon die Integrabilitätsbedingungen von (10. 1) bestimmen. Eine kovariante Ableitung der Gleichung (10. 1) nach $x^l$ zeigt auf Grund der allgemeinen Relation (10. 3), daß die Gleichung

$$(\varDelta g_{ik})|_l=0$$

---

[6]) Wir haben (10. 1) mit 2 dividiert.

in der Formel

(10. 5) $$\Delta L^{*j}_{i\ k} = 0$$

enthalten ist. Eine Reihe der Integrabilitätsbedingungen von (10. 1) erhält man also durch die Bestimmung der Integrabilitätsbedingungen von (10. 5). Nach der Gleichung (9. 5) bekommt man statt (10. 5):

(10. 6) $$\xi^j|_i|_k + \overline{R}_i{}^j{}_{kr}\xi^r + L^{*j}_{i\ k}\|_r(\xi^r|_o + 2\Omega^{*r}_{o\ t}\xi^t) + 2\Omega^{*j}_{i\ r}\xi^r|_k + 2\Omega^{*j}_{i\ r}|_k\xi^r = 0.$$

Differenziert man jetzt diese Gleichung kovariant nach $x^l$, vertauscht man dann die Indizes $k$ und $l$, so erhält man einen Ausdrück für $2\xi^j|_i|_{[k}|_{l]}$. Diese Differenz kann aber auf Grund der Identitäten von Ricci und im Hinblick auf (10. 6) durch $\xi^j$ und $\xi^j|_i$ ausgedrückt werden; somit bekommt man unter Beachtung der Bianchischen Identitäten (8. 7) des Hauptkrümmungstensors $\overline{R}_i{}^j{}_{kl}$ eine Gleichung für $\xi^t, \xi^t|_r$ und $\xi^t|_o$. Beachtet man noch die Formel

(10. 7) $$\overline{R}_i{}^j{}_{kl}\|_t = 2L^{*j}_{i\ [k}\|_{|t|}|_{l]} + 2L^{*j}_{i\ r}\|_t\Omega^{*r}_{k\ l} + 2l^s L^{*r}_{s\ [k}\|_{|t|}L^{*j}_{|i|\ l]}\|_r,$$

so sieht man, daß die erhaltene Gleichung eben

(10. 8) $$\Delta\overline{R}_i{}^j{}_{kl} = 0$$

ist. Weitere kovariante Ableitungen ergeben auf Grund von (10. 5) im Hinblick auf die Verallgemeinerung von (10. 3):

(10. 9) $$\Delta(\overline{R}_i{}^j{}_{kl}|_{m_1}|_{m_2}\dots|_{m_r}) = 0.$$

Differenziert man jetzt (10. 1) partiell nach $v^l$, so wird auf Grund der Formel (10. 4):

(10. 10) $$\Delta\partial_{v^l} g_{ik} = 0$$

und nach weiteren partiellen Ableitungen nach $v^r$ bekommt man:

(10. 11) $$\Delta\partial_{v^1\dots v^r} g_{ik} = 0, \quad \partial_{v^1\dots v^r} = \frac{\partial^r}{\partial v^1\cdots\partial v^r}, \qquad (r = 1, 2, \dots).$$

Es kann leicht verifiziert werden, daß

(10. 12) $$\partial_{v^m}\Delta L^{*j}_{i\ k} - \Delta\partial_{v^m}L^{*j}_{i\ k} = 0.$$

besteht; dabei ist $\partial_{v^m}L^{*j}_{i\ k}$ auf Grund des Transformationsgesetzes (3. 2) von $L^{*j}_{i\ k}$ ein Tensor. Aus (10. 12) folgt nach (10. 5):

(10. 13) $$\Delta\partial_{v^1\dots v^s}L^{*j}_{i\ k} = 0, \qquad (s = 0, 1, \dots)\,[7].$$

Wegen der Homogenität, kommt bei diesen Gleichungen nur die letzte in Betracht, da daraus schon die Gültigkeit der Übrigen folgt. (Vgl. etwa [14] S. 79, oder [6], Gleichung (3. 11).)[8])

[7]) $s = 0$ gibt eben (10. 5).

[8]) In [6] ist zwar das Grundelement eine kovariante Vektordichte vom Gewicht —1, der formale Apparat ist aber dem unsrigen bezüglich der Gleichung (10. 13) ganz ähnlich.

Die kovarianten Ableitungen von (10. 13) ergeben noch die Reihe

$$(\Delta \partial_{v^{1}\ldots v^{s}} \overset{*}{L}{}_{i}{}^{j}{}_{k})|_{m_1}\ldots|_{m_t} = 0. \tag{10. 14}$$

Die Integrabilitätsbedingungen können wir also im folgenden Theorem zusammenfassen:

Theorem B. *Die Integrabilitätsbedingungen von* (10. 1) *sind die Gleichungen* (10. 5), (10. 8)—(10. 11), (10. 13) *und* (10. 14).

Alle übrigen Integrabilitätsbedingungen sind schon in diesen enthalten. Wir müssen also noch zeigen, daß die Bedingungen

$$(\Delta \partial_{v^k} g_{ij})|_m = 0, \tag{10. 15}$$

und

$$\partial_{v^m} \Delta \overline{R}_i{}^j{}_{kl} = 0 \tag{10. 16}$$

schon in den bisherigen Integrabilitätsbedingungen enthalten sind.

Nun kann die Formel

$$(\partial_{v^k} g_{ij})|_m - \partial_{v^k} g_{ij}|_m = -\partial_{v^k} \overset{*}{L}{}_t{}^r{}_m (v^t \partial_{v^r} g_{ij} - g_{ir}\delta^t_j - g_{rj}\delta^t_i) \tag{10. 17}$$

unmittelbar verifiziert werden. Beachtet man jetzt daß *für eine Bewegung die Liesche Ableitung nach* (10. 3), (10. 4) *und* (10. 13) *mit der kovarianten Ableitung nach* $x^l$ *und mit der partiellen Ableitung nach* $v^l$ *vertauschbar ist,* so erhält man nach der Lieschen Ableitung von (10. 17) wegen $g_{ij}|_m = 0$ und $\Delta v^t = 0$ eben die Relation (10. 15).

Betreffs des Beweises der Relation (10. 16), beachte man, daß wegen (2. 29) die Gleichung (10. 7) in der Form:

$$\partial_{v^t} \overline{R}_i{}^j{}_{kl} = 2(\partial_{v^t} \overset{*}{L}{}_i{}^j{}_{[k})|_{l]} + 2\overset{*}{\Omega}{}_k{}^r{}_l \partial_{v^t} \overset{*}{L}{}_i{}^j{}_r + v^s \partial_{v^t} \overset{*}{L}{}_s{}^r{}_{[k} \partial_{v^{|r|}} \overset{*}{L}{}_{|i|}{}^j{}_{l]}$$

geschrieben werden kann. Nach Anwendung der Lieschen Ableitung auf beiden Seiten dieser Gleichung, bekommen wir im Hinblick auf (10. 12) und (10. 13) eben die Gleichung (10. 16), w. z. b. w.

## § 11. Sätze über die Bahnkurven der Bewegungen.

Wir werden in diesem Paragraphen die Analoga zu einigen Sätzen bezüglich der Bewegungen die M. S. KNEBELMAN für den Finslerraum bestimmt hat, in unserem Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ untersuchen. (Vgl. [12] § 10.) Die durch (10. 2) bestimmten Killingschen Gleichungen werden wir in der Form

$$\xi^m \partial_m g_{ik} + v^r \partial_{v^m} g_{ik} \partial_r \xi^m + g_{rk} \partial_i \xi^r + g_{ir} \partial_k \xi^r = 0 \tag{11. 1}$$

benützen.

In einem geeigneten Koordinatensystem kann erreicht werden, daß $\xi^i = \delta^i_1$ besteht. Aus (11. 1) wird dann

$$\partial_1 g_{ik} = 0. \tag{11.2}$$

Aus dieser Gleichung folgt ebenso wie bei KNEBELMAN (vgl. [12] S. 557) die Feststellung, daß es in einem $\mathfrak{L}_n$, in dem eine Bewegungsgruppe existiert, ein Koordinatensystem gibt, für daß (11. 2) erfüllt ist. Aus (11. 2) folgt nämlich, daß die endlichen Transformationen

$$\bar{x}^i = x^i + \delta^i_1 t \tag{11.3}$$

die Bogenlänge nicht verändern, und aus (11. 3) folgt noch, daß diese Transformationen eine Gruppe bilden. Auch im $\mathfrak{L}_n$ besteht also der Satz:

*Gestattet $\mathfrak{L}_n$ eine infinitesimale Bewegung, so gestattet $\mathfrak{L}_n$ auch eine einparametrige Bewegungsgruppe, die von der infinitesimalen Bewegung erzeugt wird.*

Ebenso wie im Finslerraum kann man auch im Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ beweisen, daß *zwei linear-unabhängige Bewegungen verschiedene Bahnen haben.* (Vgl. [12] S. 558.)

Es scheint zweckmäßig zu sein, die Translationen in den allgemeinen metrischen Linienelementräumen $\mathfrak{L}_n$ etwas anders zu definieren, als im Finslerraum (vgl. [12] S. 558), oder im Riemannschen Raum (vgl. [7] § 52). Für die Translationen geben wir die folgende

Definition. *Eine Bewegung ist eine Translation, falls ihre Bahnkurven gleichzeitig autoparallele Linien von $\mathfrak{L}_n$ sind.*

Im Finslerraum, bzw. im Riemannschen Raum stehen statt autoparallerer Linien die geodätischen Kurven; diese sind aber in diesen beiden Räumen mit den autoparallelen Linien identisch. Somit stimmt unsere Definition mit der gewöhnlichen überein, falls $\mathfrak{L}_n$ einen Finslerschen, bzw. Riemannschen Raum bedeutet. Im allgemeinen Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ sind aber die autoparallelen Linien und die Extremalen, d. h. die geodätischen Kurven, wie wir in § 5. gezeigt haben, verschieden.

Im Finslerraum haben die Translationen die charakteristische Eigenschaft, daß ihre Bahnkurven eine geodätische Linie unter gleichem Winkel schneiden. Im Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ ist das nur unter gewissen Bedingungen wahr. Es besteht das

Theorem C. *Bestehen in einem Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ längs einer autoparallelen Linie $C$ die Relationen:*

$$A_{oor} = 0, \quad \sigma_{ioo} = 0 \tag{11.4}$$

*und bedeutet $T$ eine Translation, die in einem geeigneten Koordinatensystem durch* (11. 3) *dargestellt ist, so schneiden die Bahnkurven von $T$ die autoparallele Linie $C$ unter demselben Winkel.*

Bemerkung. Da (11.3) die Bahnkurven der Translation bestimmt, kann man mit einem geeigneten Koordinatensystem erreichen, daß im Finslerraum

$$\partial_1 g_{1h} - \frac{1}{2}\partial_h g_{11} = 0$$

bestehe. (Vgl. [12] S. 558—559, insb. Gl. (10.12.)) In unserem Raum $\mathfrak{L}_n$ kann diese Relation mit der in [12] angegebenen Methode nur dann erreicht werden, wenn die Bedingungen (11.4) im ganzen Raum bestehen.

Beweis des Theorems C. Nach unserer Annahme ist die Bewegung (11.3) eine Translation. Der Vektor der Bewegung ist somit $\xi^i = \delta^i_1$, und es besteht auch die Gleichung (11.2). Bedeutet $x^i = x^i(s)$ die autoparallele Kurve $C$, so ist nach der Gleichung (5.5a)

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -L^{*i}_{o\ o}, \quad l^i = \frac{dx^i}{ds}, \tag{11.5}$$

und der Winkel $\theta$ der Bahnen mit der autoparallelen Kurve $C$ ist

$$\cos\theta = g_{1i}\frac{dx^i}{ds}.$$

Differenziert man diese Gleichung nach $s$, so wird wegen (11.5) längs $C$

$$\frac{d}{ds}\cos\theta = (\partial_k g_{1j} - g_{1i}L^{*i}_{j\ k} - 2A_{1oi}L^{*i}_{j\ k})\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}. \tag{11.6}$$

Aus (2.12) folgt:

$$\partial_k g_{1j} - 2A_{1ji}L^{*i}_{o\ k} - 2L^{*}_{(1j)k} = 0.$$

Überschiebt man diese Gleichung mit $l^j l^k$ und drückt man dann aus dieser Gleichung $L^*_{1oo}$ aus, so kann sofort festgelegt werden, daß (11.6) in der Form

$$\frac{d}{ds}\cos\theta = L^*_{1oo}$$

angegeben werden kann. Nach den Formeln (2.24) und (2.18) folgt aber im Hinblick auf die Gleichungen (11.2) und (11.4) wegen $\sigma_{o1o} = -\sigma_{1oo} = 0$, daß längs $C$ $L^*_{1oo} = 0$ ist. Somit wird

$$\frac{d}{ds}\cos\theta = 0$$

w. z. b. w.

Ist $x^i = x^i(s)$ die Gleichung einer Kurve, so nennt man den Vektor $\mu^i = \xi^i|_j x'^j$ den assoziierten Vektor von $\xi^i$ bezüglich der Kurve $x^i(s)$ (vgl. etwa [12] S. 560). Für den assoziierten Vektor besteht das

Theorem D. *Bestehen in einem $\mathfrak{L}_n$ längs einer Kurve $C$ die Relationen* (11.4) *und ist $\xi^i$ der Vektor einer Bewegung, so ist der assoziierte Vektor $\mu^i$ orthogonal zur Kurve $C$, wenn $l^i = x'^i$ ist.*

Beweis. Überschieben wir die Gleichung (10.2) mit $l^i l^k$, so wird nach

$$\xi_i|_k x'^k = \mu_i$$

und nach (11.4) längs $C$ die Gleichung

$$\mu_i x'^i - 2\Omega^*_{too}\xi^t = 0 \tag{11.7}$$

bestehen. Nach (2.24) ist aber auf Grund der Symmetrie von $\Gamma^*_{tkm}$ in $t, m$

$$\Omega^*_{tkm} = \sigma_{[t|k|m]} - A_{[t|kr|}\,\sigma_{|\varrho|m]}^{\;s} J^r_s .$$

Nach den Bedingungen (11.4) ist dann wegen der schiefen Symmetrie des Tensors $\sigma_{tkm}$ in $t, k$ längs der Kurve $C$

$$\Omega^*_{too} = 0.$$

Somit beweist die Gleichung (11.7) eben das Theorem D.

## § 12. Räume, in denen die Bewegungsgruppe $\frac{1}{2}n(n+1)$ Parameter hat.

Die Bewegungsgruppe des $\mathfrak{L}_n$ wird von denjenigen Geschwindigkeitsvektoren $\xi^i$ der Transformation (9.1) erzeugt, die den Killingschen Gleichungen (10.2) genügen. Da die Zahl der Gleichungen (10.2) $1/2n(n+1)$ ist, kann die allgemeine Lösung von (10.2) höchtens $1/2n(n+1)$ Parameter haben.

H. C. Wang hat bewiesen (vgl. [17] S. 5.):

*Wenn in einem $n$-dimensionalen ($n > 2$) Finslerraum $E_n$ eine Bewegungsgruppe existiert, die $r > 1/2n(n-1)+1$ Parameter hat, dann ist $E_n$ notwendigerweise ein Riemannscher Raum von konstanter Krümmung.*

Im allgemeinen metrischen Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ ist dieser Satz nicht zutreffend. Die Methode von H. C. Wang, mit der er diesen Satz bewiesen hat, ist auch im Raum $\mathfrak{L}_n$ anwendbar, und führt zur Gleichung

$$\frac{1}{2}\,\partial^3_{v^i v^j v^k} F^2 = 0.$$

Nach (1.4) ist aber diese Gleichung mit

$$3(\partial_{v(k} g_{ij)} + v^r \partial^2_{v(j v^k} g_{i)r}) + \frac{1}{2} v^r v^s \partial^3_{v^i v^j v^k} g_{rs} = 0 \tag{12.1}$$

identisch. Aus dieser Gleichung kann aber in $\mathfrak{L}_n$ noch nicht gefolgert werden, daß $g_{ij}$ von den $v^k$ unabhängig ist. Doch bedeutet die Relation (12.1) eine Beschränkung für $g_{ij}$ die wir im folgenden Theorem zusammenfassen.

Theorem E. *Existiert in einem metrischen Linienelementraum $\mathfrak{L}_n (n>2)$ eine Bewegungsgruppe, die $r>1/2n(n-1)+1$ Parameter hat, so erfüllt sein metrischer Grundtensor $g_{ij}$ die Relation* (12. 1).

Wir betrachten im folgenden einen Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$, in dem *eine Bewegungsgruppe mit $1/2n(n+1)$ wesentlichen Parameter existiert,* und wollen in einigen Spezialfällen die Gestalt des Krümmungstensors untersuchen. Dazu schreiben wir die Killingschen Gleichungen (10. 2) in der Form:

(12. 2) $$\zeta_{ik}+\zeta_{ki}=0,$$

wo

(12. 3) $$\zeta_{ik} \overset{\text{def}}{=} \xi_i|_k + A_{ikm}(\xi^m|_0 - 2\Omega_t^{*m}{}_0\xi^t) - 2\Omega^*_{t(ik)}\xi^t$$

bedeutet. Nun betrachten wir die folgenden Spezialfälle

A₁) $\zeta_{ik}=\zeta_{i;k}, \quad \overline{R}_0{}^j{}_{km}=0, \quad \Omega^{*j}_i{}_k=0;$

A₂) $\zeta_{ik}=\zeta_i|_k, \quad \Omega^{*j}_i{}_k=0, \quad \zeta_i\|_r=0, \quad \overline{R}_i{}^r{}_{kr}=\overline{R}^r{}_{irk};$

A₃) $\Omega^*_{t(ik)}=0, \quad A_{ikm}=0.$

Wir beweisen jetzt das folgende Theorem:

Theorem F. *Im Falle A₁) ist die Krümmung des metrischen Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ identisch Null; im Falle A₂) ist der Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ von skalarer Krümmung; im Falle A₃) hat der Hauptkrümmungstensor die Form:*

$$\overline{R}_{ktij}=\frac{\overline{R}}{n(n-1)}(g_{ki}g_{tj}-g_{kj}g_{ti})+Q^*_{ktij}, \quad \overline{R}=g^{ki}\overline{R}_k{}^t{}_{it}$$

*wo $Q^*_{ktij}$ von $\Omega^{*i}_k{}_t$ und deren kovarianten Ableitungen abhängt.*

Beweis. Im Falle A₁) bekommt man aus (12. 2):

(12. 4) $$\zeta_{(i|j)}=0, \qquad \zeta_t=g_{ir}\xi^r.$$

Wir wollen jetzt die in der Riemannschen Geometrie angewandte Methode benützen (vgl. [7] § 53). Differenzieren wir (12. 4) kovariant nach $x^k$, so wird:

(12. 5) $$\zeta_{(i|j)}|_k=0.$$

Auf Grund dieser Gleichung besteht offenbar:

(12. 6) $$\zeta_i|_j|_k+\zeta_i|_{[k}|_{j]}+\zeta_j|_{[i}|_{k]}+\zeta_k|_{[i}|_{j]}=0.$$

Nach der Gleichung (8. 5) folgt bei der Beachtung der Bedingungen des Falles A₁) und im Hinblick auf (8. 3) und (7. 10)

(12. 7) $$\zeta_i|_j|_k=-\zeta_r\overline{R}_k{}^r{}_{ji}=-\zeta_r R_k{}^r{}_{ji}$$

da nach den gestellten Bedingungen

(12. 8) $$R_i{}^j{}_{km}=\overline{R}_i{}^j{}_{km}$$

besteht. Aus der Gleichung (12.7) folgen die Gleichungen (12.5) und (8.5). Bilden wir jetzt die Integrabilitätsbedingungen von (12.7) und benützen wir die Identitäten von Ricci für

$$2\zeta_i|_j|_{[k}|_{l]},$$

so bekommen wir ebenso, wie im Riemannschen Raum (vgl. [7] § 53):

$$\zeta_r(\overline{R}_l{}^r{}_{ij}|_k - \overline{R}_k{}^r{}_{ij}|_l) + \zeta_t|_r(\delta_k^r \overline{R}_l{}^t{}_{ij} - \delta_i^t \overline{R}_j{}^r{}_{kl} + \delta_l^r \overline{R}_k{}^t{}_{ji} - \delta_j^r \overline{R}_i{}^t{}_{kl}) = 0.$$

Existiert also im Raum $\mathfrak{L}_n$ eine Bewegungsgruppe mit $1/2n(n+1)$ Parametern, so folgt aus unserer letzten Gleichung, wegen der schiefen Symmetrie von $\zeta_i|_j$ (vgl. (12.4)):

$$\overline{R}_l{}^r{}_{ij}|_k - \overline{R}_k{}^r{}_{ij}|_l = 0$$

und

$$\delta_k^{[r} \overline{R}_l{}^{t]}{}_{ij} + \delta_i^{[r} \overline{R}_j{}^{t]}{}_{kl} + \delta_l^{[r} \overline{R}_k{}^{t]}{}_{ji} + \delta_j^{[t} \overline{R}_i{}^{r]}{}_{kl} = 0. \tag{12.9}$$

Wir können jetzt ganz analog wie in der Riemannschen Geometrie verfahren, (vgl. [7] § 53), da nach (12.8) der Tensor $\overline{R}_{ijkl}$ auch in $i, j$ schiefsymmetrisch ist. Setzt man in (12.9) $r = l$, so wird nach einer Summation auf $l$ im Hinblick auf (8.3) und (7.10)

$$\overline{R}_{ktij} = \frac{1}{n-1}(g_{tj}\overline{R}_{ik} - g_{ti}\overline{R}_{jk}), \qquad \overline{R}_{ik} \overset{\text{def}}{=} \overline{R}_i{}^l{}_{kl}. \tag{12.10}$$

Eine Überschiebung mit $g^{tj}$ ergibt, daß $\overline{R}_{ki}$ ein symmetrischer Tensor ist. Eine Überschiebung von (12.10) mit $g^{ik}$ ergibt dann, daß

$$\overline{R}_{jt} = \frac{1}{n}\overline{R} g_{jt}, \qquad \overline{R} \overset{\text{def}}{=} \overline{R}_i^i \tag{12.11}$$

besteht. Überschiebt man jetzt (12.10) mit $l^k$, so wird man nach (12.11) $\overline{R} = 0$ erhalten, das beweist aber auf Grund von (12.10) und (12.11) unsere Behauptung im Falle $A_1$).

Einen Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$, dessen Hauptkrümmungstensor identisch Null ist, bekommt man, wenn $g_{ik}$ allein von den $v^i$ abhängig ist, und nach unserer Bedingung $\sigma_{ikm} = 0$ besteht. Das ist aus den Formeln (2.24), (2.18), (2.21) und (7.7) ersichtlich. Die Räume $\mathfrak{L}_n$, in denen der metrische Fundamentaltensor von den $v^i$ unabhängig ist, sind die Verallgemeinerungen der Minkowskischen Räume. Es ist nach (2.18) und (2.21) jetzt offenbar $\Gamma^*_{ijk} = 0$. (Vgl. auch die Formel (6.2)). Wäre jetzt noch auch $A_{ikm} = 0$, so wäre $g_{ik} =$ konst; der Raum $\mathfrak{L}_n$ wäre somit bezüglich der Metrik ein Euklidischer Raum. Das invariante Differential ist aber auch in einem Descartes-schen Koordinatensystem von der Form:

$$D\eta^i = d\eta^i + \mu_r{}^i{}_k \eta^r \omega^k(d);$$

somit ist dieser Raum eine Erweiterung des Euklidischen Raumes. Die Erweiterung zeigt sich in dem Vorhandensein des Raumtorsionstensors $\mu_r{}^i{}_k$.

Im Falle $A_2$) bekommt man ebenso, wie vorher die Gleichungen (12. 4)—(12. 7). Die Integrabilitätsbedingungen von (12. 7) ergeben aber jetzt auf Grund der Identitäten von Ricci die Gleichungen:

$$\zeta_r(\overline{R}_t{}^r{}_{ij}|_k - \overline{R}_k{}^r{}_{ij}|_t + L_i^{*r}{}_j\|_t \overline{R}_o{}^t{}_{kl}) + \zeta_t|_r(\delta_k^r \overline{R}_l{}^t{}_{ij} - \delta_i^t \overline{R}_j{}^r{}_{kl} + \delta_l^r \overline{R}_k{}^t{}_{ji} - \delta_j^r \overline{R}_i{}^t{}_{kl}) = 0.$$

Hat nun die Bewegungsgruppe $1/2n(n+1)$ wesentliche Parameter, so existiert auch eine Lösung $\zeta_r$ dieser Gleichung mit $1/2n(n+1)$ Parameter, d. h. nach (12. 4) bekommt man die Gleichung (12. 9) und

$$\overline{R}_l{}^r{}_{ij}|_k - \overline{R}_k{}^r{}_{ij}|_l + L_i^{*r}{}_j\|_t \overline{R}_o{}^t{}_{kl} = 0.$$

Nun wollen wir uns mit der Gleichung (12. 9) beschäftigen; diese Gleichung bestimmt schon die Form des Krümmungstensors. Nach einer Verjüngung auf $r, l$ wird aus der Gleichung (12. 9) im Hinblick auf (7. 10) und (8. 3)

$$(12.12)\qquad (n-1)\overline{R}_k{}^t{}_{ji} - \delta_k^t \overline{R}_r{}^r{}_{ij} = \delta_i^t \overline{R}_{jk} - \delta_j^t \overline{R}_{ik}, \qquad \overline{R}_{ik} \overset{\text{def}}{=} \overline{R}_i{}^r{}_{kr}.$$

Nach einer Verjüngung auf $j, t$ wird:

$$(12.13)\qquad \overline{R}_r{}^r{}_{ik} = 2(n-1)\overline{R}_{[ik]}.$$

Nach einer Verjüngung auf $k, t$ bekommt man aus (12. 12):

$$(12.14)\qquad (2n-1)\overline{R}_r{}^r{}_{ij} = 2\overline{R}_{[ij]}.$$

Aus den Gleichungen (12. 13) und (12. 14) folgt nun

$$(12.15)\qquad \overline{R}_{[ij]} = 0, \qquad \overline{R}_r{}^r{}_{ij} = 0.$$

Die Gleichung (12. 12) geht somit in

$$(12.16)\qquad \overline{R}_{ktji} = \frac{1}{n-1}(g_{it}\overline{R}_{jk} - g_{jt}\overline{R}_{ik})$$

über, wo nach (12. 15) der Tensor $\overline{R}_{jk}$ symmetrisch ist. Eine Überschiebung mit $g^{ik}$ ergibt aus (12. 16) wieder die Relation $\overline{R}_{jt} = 1/n R g_{jt}$; somit wird aus (12. 16)

$$(12.17)\qquad \overline{R}_{ktji} = \frac{\overline{R}}{n(n-1)}(g_{kj}g_{ti} - g_{tj}g_{ki}).$$

Hieraus ergibt sich aber, daß der Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ bezüglich des Hauptkrümmungstensors $\overline{R}_i{}^j{}_{kl}$ ein Raum von skalarer Krümmung ist. Die Räume, deren Krümmungstensoren die Form (12. 17) haben, sind immer Räume von skalarer Krümmung im Sinne von L. Berwald; er hat nämlich die Finslerräume skalarer Krümmung durch

$$(12.17a)\qquad R_o{}^j{}_{ok} = R(\delta_k^j - l^j l_k)$$

gekennzeichnet. Aus der Formel (12. 17) folgt aber offenbar nach einer Überschiebung mit $l^k l^j$ für $\overline{R}_o{}^t{}_{oi}$ die Form (12. 17a). (Vgl. [2] Gleichung (13. 3).)

Ist $\overline{R} = \text{konst.}$, so ist $\mathfrak{L}_n$ ein Raum von konstanter Krümmung. Damit haben wir den zweiten Teil des Theorems $F$ bewiesen.

Da nach (12. 17) $\overline{R}_{ktji}$ in den ersten beiden Indizes schiefsymmetrisch ist, so folgt aus (7. 6) wegen der schiefen Symmetrie des vollständigen Riemannschen Krümmungstensors in den ersten beiden Indizes, daß auch

$$M^*_{ijr}(\delta^r_p + M^{*r}_{o\ p})\overline{R}_o{}^p{}_{ts}$$

in $i, j$ schiefsymmetrisch ist. Aus der schiefen Symmetrie folgt nun wegen der speziellen Form (12. 17) des Hauptkrümmungstensors $\overline{R}_{ktji}$, daß

$$M^*_{(ij)r}(\delta^r_p + M^{*r}_{o\ p})\delta^p_{[s} l_{t]} = 0$$

besteht. Nach einer Überschiebung mit $l^t(\delta^s_k - M^{*s}_{o\ k})$ erhält man nach den Gleichungen (2. 6a), (2. 1a) und (2. 3b), daß schon $M^*_{(ij)k} = 0$ ist. Auf Grund von (2. 13) wird daher

$$A_{ijr}(\delta^r_k - M^{*r}_{o\ k}) = 0, \quad M^*_{ijk} = \mu_{ijk}(x, v)$$

bestehen. Eine Überschiebung mit $(\delta^k_t + M^{*k}_{o\ t})$ ergibt sofort nach (2. 3a), daß $A_{ijt} = 0$ besteht; der Raum $\mathfrak{L}_n$ ist also eine unmittelbare Erweiterung des Riemannschen Raumes. Der metrische Grundtensor $g_{ik}(x)$ bestimmt nämlich einen Riemannschen Raum von konstanter Krümmung, das invariante Differential hängt aber vom Linienelement ab. Es ist[9])

$$D\eta^i = d\eta^i + (\mu_r{}^i{}_t \omega^t(d) + \Gamma^{*i}_{r\ t} dx^t)\eta^r.$$

Nach (12. 3) ist $\zeta_{ik} = \xi_i|_k$. Im Raum existiert also der Raumtorsionstenso $\mu_r{}^i{}_t(x, v)$.

Wir wollen uns jetzt mit dem Fall A₃) befassen. Nach unseren Annahmen

$$A_{ijk} = 0, \quad \Omega^*_{i(jk)} = 0$$

folgt auf Grund der Formel (2. 24), daß

$$\Omega^*_{ijk} = \sigma_{[i|j|k]}, \quad \Omega^*_{i(jk)} = \frac{1}{2}\sigma_{i(jk)} = 0$$

besteht. Da $\sigma_{ijk}$ in $i, j$ immer schiefsymmetrisch ist, so beweist unsere letzte Gleichung die schiefe Symmetrie des Tensors $\sigma_{ijk}$ in allen Indizes. $\sigma_{ijk}$ ist selbstverständlich von $(x, v)$ abhängig. Der Raum $\mathfrak{L}_n$ ist also wieder eine Erweiterung des Riemannschen Raumes, da die Tensoren $\mu_{ijk}$ und $\sigma_{ijk}$ nicht verschwinden. Es tritt also in diesem Falle entgegen den vorigen Fällen neben dem Raumtorsionstensor $\mu_{ijk}$ auch eine Übertagungstorsionstensoı $\sigma_{ijk}$ auf.

Aus der Gleichung (10. 2) wird:

$$\xi_{(i|k)} = 0$$

---

[9]) Wir bemerken, daß im Falle $A_{ijk} = 0$ und $\Omega^*_{ijk} = 0$ aus (2. 24) leicht gefolgert werden kann, daß $L^{*i}_{i\ k} = \Gamma^{*i}_{i\ k}$ ist.

und nach kovarianter Ableitung nach $x^l$ wird:

$$\xi_{(i}|_{k)}|_l = 0.$$

Auf Grund dieser Gleichung kann die Relation

$$\xi_i|_j|_k + \xi_i|_{[k}|_{j]} + \xi_j|_{[i}|_{k]} + \xi_k|_{[i}|_{j]} = 0$$

unmittelbar verifiziert werden. Nach den Identitäten von Ricci, d. h. nach den Gleichungen (8. 5) wird wegen $\xi^i\|_k = 0$:

$$\xi_i|_j|_k + \frac{1}{2}\xi_r(\overline{R}_i{}^r{}_{jk} + \overline{R}_j{}^r{}_{ki} + \overline{R}_k{}^r{}_{ji}) + \xi_t|_r(\delta^t_i \overset{*}{\Omega}_j{}^r{}_k + \delta^t_j \overset{*}{\Omega}_k{}^r{}_i + \delta^t_k \overset{*}{\Omega}_j{}^r{}_i) = 0.$$

Beachten wir jetzt die Bianchischen Identitäten (8. 3)-nachdem wir in (8. 3) statt $R_m{}^i{}_{jk}$ auf Grund von (7. 10) $\overline{R}_m{}^i{}_{jk}$ eingeführt haben-, so wird man aus unserer letzten Gleichung

$$\xi_i|_j|_k - \xi_r(R_k{}^r{}_{ij} - \Phi_k{}^r{}_{ij}) + \xi_t|_r \Phi_i{}^{tr}{}_{jk} = 0 \tag{12. 18}$$

bekommen, wo

$$\Phi_k{}^r{}_{ij} \overset{\text{def}}{=} \overset{*}{\Omega}_i{}^r{}_j|_k + 2\overset{*}{\Omega}_i{}^r{}_t \overset{*}{\Omega}_j{}^t{}_k + \{\text{zykl.}\}_{ijk}$$

$$\Phi_i{}^{tr}{}_{jk} \overset{\text{def}}{=} \delta^t_i \overset{*}{\Omega}_j{}^r{}_k + \delta^t_j \overset{*}{\Omega}_k{}^r{}_i + \delta^t_k \overset{*}{\Omega}_j{}^r{}_i$$

bedeutet. Differenziert man die Gleichung (12. 18) kovariant nach $x^l$, und vertauscht dann die Indizes $k, l$, so wird man nach Elimination von $\xi_t|_r|_l$ eine Gleichung der Form

$$\xi_i|_j|_{[k}|_{l]} - \xi_s(R_{[k}{}^s{}_{|ij|}|_{l]} + \psi_k{}^s{}_{jil}) - \xi_t|_r(\delta^r_{[l}\overline{R}_{k]}{}^t{}_{ij} + \psi_l{}^{tr}{}_{ijk}) = 0$$

erhalten. Benützt man jetzt die Identitäten von Ricci, wobei $\xi_i|_j|_r$ wieder vermöge (12. 18) eliminiert wird, so erhält man bei Beachtung der schiefen Symmetrie von $\xi_t|_r$ eine Gleichung, in der der Koeffizient von $\xi_t|_r$ die Form:

$$\delta^{[r}_{[k}\overline{R}_{l]}{}^{t]}{}_{ij} + \delta^{[r}_{[i}\overline{R}_{j]}{}^{t]}{}_{kl} + Q_{ij}{}^{tr}{}_{kl}$$

hat, wo der Tensor $Q_{ij}{}^{tr}{}_{kl}$ allein von den $\overset{*}{\Omega}_i{}^j{}_k$ bzw. deren kovarianten Ableitungen abhängt.

Hat im Raume $\mathfrak{L}_n$ die Bewegungsgruppe $1/2n(n+1)$ wesentliche Parameter, so muß dieser Koeffizient verschwinden. Setzt man $r = l$, so wird nach den Gleichungen (8. 3) und (7. 10)

$$(n-1)\overline{R}_k{}^t{}_{ij} + \delta^t_k \overline{R}_r{}^r{}_{ij} = \delta^t_j \overline{R}_{ik} - \delta^t_i \overline{R}_{jk} + Q_k{}^t{}_{ij}. \tag{12. 19}$$

Nach (2. 13) ist aber wegen $A_{ijr} = 0$ der Tensor $\overset{*}{M}_{ijr}$ in $i, j$ schiefsymmetrisch; da aber der vollständige Riemannsche Krümmungstensor in den ersten beiden Indizes immer schiefsymmetrisch ist, gilt dies wegen (7. 6) auch für den Hauptkrümmungstensor. Somit bekommt man aus der Relation (12. 19)

$$\overline{R}_k{}^t{}_{ij} = \frac{1}{n-1}(\delta^t_j \overline{R}_{ik} - \delta^t_i \overline{R}_{jk}) + \frac{1}{n-1} Q_k{}^t{}_{ij}. \tag{12. 20}$$

Ziehen wir den Index „$t$" herunter, dann bekommt man nach Überschiebung mit $g^{tj}$

$$\bar{R}_{ki} = \bar{R}_{ik} + \frac{1}{n-1} Q_{k}{}^{t}{}_{it}. \tag{12.21}$$

Eine Überschiebung von (12.20) mit $g^{ik}$ ergibt wegen der schiefsymmetrischen Eigenschaften des Hauptkrümmungstensors

$$\bar{R}_{tj} = \frac{1}{n-1}(g_{tj}\bar{R} - \bar{R}_{jt}) + \frac{1}{n-1} Q^{r\cdot}{}_{trj}. \tag{12.22}$$

Aus (12.21) und (12.22) folgt, daß $\bar{R}_{ik}$ die Form

$$\bar{R}_{ik} = \frac{1}{n} \bar{R} g_{ik} + \bar{Q}_{ik}$$

hat, wo $\bar{Q}_{ik}$ allein von den $\Omega^{*j}_{i\,k}$ und deren kovarianten Ableitungen abhängt. Substituiert man $\bar{R}_{ik}$ in die Gleichung (12.20), so bekommt man für den Hauptkrümmungstensor die im Theorem F angegebene Form.

## Schriftenverzeichnis.


[1] L. Berwald, Über die $n$-dimensionalen Cartanschen Räume und eine Normalform der zweiten Variation eines $(n-1)$-dimensionalen Oberflächenintegrals, *Acta Math.*, **71** (1939), 191—248.

[2] L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie. IV, *Annals of Math.*, **48** (1947), 755—781.

[3] E. Cartan, Les espaces de Finsler, *Actualités scientifiques et industrielles*, **79** (Paris Hermann & Cie., 1934).

[4] E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Cahiers scientifiques, fasc. II Deuxième édition (Paris, Gauthier-Villars, 1946).

[5] E. T. Davies, On metric spaces based on a vector density, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **49** (1947), 241—259.

[6] E. T. Davies, On motions in a metric space based on the notion of area, *Quarterly Journal of Math.* (Oxford series), **16** (1945), 22—30.

[7] L. P. Eisenhart, *Continuous groups of transformations* (Princeton University Press, 1933).

[8] P. Finsler, *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen* (Dissertation Göttingen, 1918).

[9] J. G. Freemann, First and second variations of the length integral in a generalized metric space, *Quarterly Journal of Math.* (Oxford series), **15** (1944), 70—83.

[10] J. I. Horváth und A. Moór, Entwicklung einer Feldtheorie begründet auf einen allgemeinen metrischen Linienelementraum, *Indagationes Math.*, **17** (1955), 421—429, 581—587.

[11] A. Kawaguchi, Beziehung zwischen einer metrischen linearen Übertragung und einer nicht-metrischen in einem allgemeinen metrischen Raume, *Proc. Kon. Acad. Wet. Amsterdam*, **40** (1937), 596—601.

[12] M. S. Knebelman, Collineations and motions in generalized spaces, *American Journal of Math.*, **51** (1929), 527—564.

[13] J. A. Schouten und J. Haantjes, Über die Festlegung von allgemeinen Maßbestimmungen in bezug auf ko- und kontravariante Vektordichten, *Monatshefte für Math. und Phys.* **43** (1936), 161—176.

[14] Gy. Soós, Über Gruppen von Affinitäten und Bewegungen in Finslerschen Räumen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), 73—84.

[15] O. Varga, Über affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten von Linienelementen, insbesondere deren Äquivalenz, *Publicationes Math.* (Debrecen), **1** (1949), 7—17.

[16] O. Varga, Zur Herleitung des invarianten Differentials in Finslerschen Räumen, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **50** (1941), 165—175.

[17] H. C. Wang, On Finsler spaces with completely integrable equations of Killing, *Journal of the London Math. Soc.*, **22** (1947), 5—9.

*(Eingegangen am 28. Dezember 1955.)*

# Bibliographie.

**P. Samuel, Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique** (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 4), IX + 133 p., Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.

Ce travail a pour but de donner un premier exposé d'ensemble des fondements de la Géométrie Algébrique abstraite. Il contribuera sans aucun doute à simplifier la tâche de tous les mathématiciens désireux d'acquérir ou de compléter une documentation qu'ils étaient forcés, jusqu'à présent, de puiser dans de nombreux ouvrages utilisant des méthodes et des langages très divers. L'auteur a, en effet, réussi à mener à bien la tâche difficile qu'il s'était imposée: faire connaître les différents points de vue actuels et les mettre en parallèle, tout en donnant un exposé à la fois clair et complet, non seulement des résultats, mais aussi de certaines démonstrations importantes.

Le premier des deux chapitres qui composent cet ouvrage, intitulé "Théorie globale élémentaire", commence par la définition des ensembles algébriques et des variétés affines ou projectives ainsi que de quelques unes des notions générales qui s'y rattachent: points génériques, spécialisations, produits, projections, intersections, normalité. C'est seulement après une étude aussi complète que possible des variétés définies sur un corps de base fixe ($k$-variétés), qu'on examine les effets d'une extension du corps de base et qu'on aborde l'étude des variétés proprement dites, ou "variétés absolues". Les difficultés qui peuvent alors surgir en caractéristique non nulle sont clairement énoncées et délimitées. L'auteur procède à un examen détaillé des différents types de propriétés vraies "presque partout" (c'est-à-dire pour les points d'une variété situés en dehors d'un de ses sous-ensembles algébriques), puis expose la méthode des coordonnées de Chow et ses applications à l'étude des spécialisations des variétés ou des cycles, ainsi qu'à celle des correspondances et des systèmes algébriques de cycles.

Le second chapitre est consacré à la Géométrie Algébrique locale et aux multiplicités d'intersection. Les notions géométriques qui y interviennent sont définies et étudiées par la théorie générale des anneaux locaux et de leurs complétés: normalité locale, cône des tangentes, espace tangent de Zariski. L'auteur expose les critères "jacobiens" de Zariski pour caractériser les points simples des variétés algébriques (faisant intervenir, en caractéristique non nulle, des "dérivations mixtes"), puis aborde l'étude de la notion de multiplicité d'intersection, en montrant l'équivalence de ses deux principaux modes de définition: celle de Chevalley, qui utilise la notion de longueur d'un idéal primaire dans un anneau local, et celle de Weil, qui repose sur la notion de multiplicité d'une spécialisation. La théorie des multiplicités, ainsi que ses généralisations, dues à l'auteur, au cas des composantes excédentaires ou singulières est ensuite appliquée à l'établissement des propriétés locales et globale des intersections de cycles.

Un certain nombre de résultats algébriques généraux, utiles pour la lecture de cet ouvrage, sont exposés dans un "Rappel Algébrique", lui-même suivi d'un intéressant annexe historique.

*A. Néron* (St. Ouen, France)

**Otto Haupt, Differential- und Integralrechnung.** Unter Mitarbeit von GEORG AUMANN. Zweite, völlig neubearbeitete Auflage unter Mitwirkung von **Christian Pauc, Bd. III: Integralrechnung** (Göschens Lehrbücherei, Bd. 26), XI + 319 S., Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1955.

Während die ersten zwei Bände bei Behaltung des Aufbaus wesentlich neubearbeitet wurden, wurde der vorliegende dritte Band völlig neugeschrieben, sodaß man von einem neuen Buch sprechen darf. Um die Richtung der neuen Fassung kurz zu charakterisieren, könnte man sagen, daß der ganzen modernen Maß- und Integrationstheorie (man möchte etwa ans Stoff des wohlbekannten Buches von SAKS denken) eine möglichst verallgemeinerte abstrakte Darstellungsweise verliehen wurde.

Im Sinne dieser abstrahierenden und verallgemeinernden Richtung wurden in der Maßtheorie statt auf Mengenkörpern definierter Inhalte und Maße auf (abstrakten) Verbänden definierte additive und $\sigma$-additive Somenfunktionen zugrunde gelegt. Aus diesem Grund beschäftigt sich der erste Abschnitt mit den Elementen der Verbandstheorie, in erster Reihe mit den Eigenschaften der (den Mengenkörpern entsprechenden) Booleschen Verbände, deren Theorie bis zum Stoneschen Satz gefolgt wird. Im zweiten Abschnitt werden die Begriffe von Inhalt, Maß, Vollständigkeit eines Inhalts, äußerem und innerem Maß im erwähnten verallgemeinerten Sinne eingeführt und ihre einfachsten Eigenschaften untersucht. Im dritten Abschnitt wird die Frage der Erweiterung von Inhalten und Maßen nebst der mit Hilfe des äußeren Maßes operierenden Methode auch durch einen in größerem Maße konstruktiven Vorgang behandelt. Als Anwendung werden Inhalte und Maße in euklidischen Räumen, insbesondere Jordanscher Inhalt und Lebesguesches Maß untersucht.

Im vierten Abschnitt werden die klassische Theorie der bezüglich eines $\sigma$-Mengenkörpers meßbaren Punktfunktionen entwickelt, das (abstrakte) Lebesguesche Integral mit Hilfe von durch abzählbar unendliche meßbare Unterteilungen bestimmten unteren bzw. oberen Summen definiert und seine formalen Eigenschaften einschließlich der Limmessätze behandelt. Der fünfte Abschnitt beschäftigt sich mit dem unbestimmten Integral und mit den verschiedenen Zerlegungssätzen für additive und $\sigma$-additive Mengenfunktionen beliebigen Vorzeichens. Im sechsten Abschnitt finden wir eine Darstellung vom Aufbau der Theorie des abstrakten Lebesgueschen Integrals mit Hilfe der Erweiterung eines Elementarintegrals, d. h. eines über dem Vektorverband der sogenannten elementaren Funktionen definierten positiven linearen Funktionals, und zwar geschieht das durch zwei verschiedene Methoden. In diesem Gedankenkreis wird der Hilbertsche Raum der quadratisch summierbaren Funktionen untersucht. Der siebente Abschnitt entwickelt die Maß- und Integrationstheorie in Produkträumen und den Fubinischen Ideenkreis.

Im achten Abschnitt wird eine Theorie der abstrakten Verallgemeinerung des Jordanschen Inhalts und des Riemannschen Integrals dargestellt. Zu diesem Zweck wird ein Maß zugrunde gelegt, das auf einem aus Teilmengen eines topologischen Raumes bestehenden $\sigma$-Mengenkörper definiert ist; der Zusammenhang zwischen Topologie und Maß wird durch verschiedene Forderungen bestimmt. Mit Hilfe dieses Maßes werden quadrierbare Mengen als Mengen mit Rand vom Maß Null definiert; sie bilden einen Mengenkörper und das Maß, auf diesen Mengenkörper eingeschränkt, liefert den verallgemeinerten Jordan-Inhalt, auf welchen sich ein grosser Teil der klassischen Theorie übertragen läßt.

Der neunte Abschnitt gibt eine abstrakte Theorie der Derivierten von $\sigma$-additiven Mengenfunktionen. Unter verschiedenen Voraussetzungen bezüglich der Ableitungsbasis, die die zur Bildung der Differenzenquotienten zugestatteten Mengen enthält, wird eine Reihe von Dichtesätzen, Differenzierbarkeitssätzen, Zerlegungssätzen und Meßbarkeitssätzen bewiesen. Im erheblichen Teil auch dieses Abschnitts geben die Verfasser Darstellung eigener Ergebnisse. Im zehnten Abschnitt werden die Voraussetzungen insofern modifiziert, daß einerseits statt $\sigma$-Additivität nur Additivität der Mengenfunktionen gefordert, andererseits aber die Ableitungsbasis weiteren Einschränkungen unterworfen wird; hier wird eine abstrakte Formulierung von der Theorie der Funktionen beschränkter Variation, der totalstetigen Funktionen, sowie des Burkill-Integrals behandelt, ferner eine Art abstrakten Denjoy-Integrals gründlich untersucht.

Der letzte Abschnitt enthält, ähnlich der ersten Auflage, als Anwendungen die Theorie des Oberflächenmaßes $k$-dimensionaler dehnungsbeschränkter Flächenstücke im euklidischen Raum $E_n$ und die Integralsätze von GAUSS, GREEN und STOKES.

Die obige kurze Inhaltsübersicht zeight schon, daß dieses Werk eine ausgezeichnete Zusammenfassung der neueren und neuesten abstrakten Integrationstheorien für den Fachmann bietet. Mit Rücksicht darauf, daß es um einen Band von Göschens *Lehr*bücherei handelt, ist es nach Meinung des Ref. bedauernswert, daß die Notwendigkeit und Nützlichkeit des Bestrebens nach Allgemeinheit nicht durch eine größere Anzahl von Beispielen und Anwendungen unterstützt wird. In dieser Hinsicht sei es erwähnt, daß der Vitalische Überdeckungssatz für Würfeln im euklidischen Raume im Buche *nicht* bewiesen wird, folglich sind die Beweise des Maßdichtesatzes usw. einschließlich des Satzes von RADEMACHER über totale Differenzierbarkeit dehnungsbeschränkter Funktionen als Folgerungen des erwähnten Satzes auch unvollständig. Vorliegendem Buch gelingt es leider nicht die Vorurteile eines Lesers, der Abstraktheit und Verallgemeinerung nicht für Selbstzweck hält, zu zerstreuen.

*Ákos Császár* (Budapest)

**R. Baldus—F. Löbell, Nichteuklidische Geometrie** (Sammlung Göschen, Band 970). Dritte, verbesserte Auflage, 140 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1953.

Der Herausgeber FRANK LÖBELL hat dieser Neuauflage ein Nachwort für RICHARD BALDUS beigefügt, davon abgesehen unterscheidet sich diese dritte Auflage kaum von der zweiten, die 1944 erschien. Das in seiner Art ausgezeichnete Büchlein besteht unverändert aus sechs Abschnitten und 123 Nummern.

Im I. Abschnitt wird der geschichtliche Weg zur Nichteuklidischen Geometrie geschildert. Hierbei sollte erwähnt, ja betont werden, daß die Entdecker der hyperbolischen Geometrie ihre Widerspruchslosigkeit noch nicht bewiesen haben und dieser Beweis erst später, durch die Arbeiten von E. BELTRAMI, F. KLEIN und H. POINCARÉ erbracht wurde.

Im II. Abschnitt wird in ihren Hauptzügen die absolute (d. h. vom Parallelenaxiom unabhängige) ebene Geometrie dargestellt. Zugrunde gelegt wird dabei das Hilbertsche Axiomensystem in einer von R. BALDUS veränderter Form. Die Verknüpfungsaxiome sind nämlich durch die Annahme geeigneter Anordnungsaxiome und des Dimensionsaxiom ausgeschaltet, und neben dem Archimedischen Axiom wird das Cantorsche Stetigkeitsaxiom (beide in einer speziellen Form) vorausgesetzt. Dann folgt im III. Abschnitt die Absonderung der Euklidischen und der hyperbolischen ebenen Geometrie: es wird bewiesen, daß wenn es durch mindestens einen Punkt zu mindestens einer ihn nicht enthaltenden Geraden genau eine Parallele gibt, dann gilt dies für alle Punkte und Geraden. Im IV. Abschnitt werden sodann die Axiome der absoluten Geometrie durch Hinzufügung des Nichteuklidischen Parallelenaxioms (laut welchem in mindestens einem Falle mehr als eine Parallele existiert) zu einem vollständigen Axiomensystem der hyperbolischen ebenen Geometrie ergänzt. Es wird ausführlich gezeigt, daß das Klein—Hilbertsche Kreismodell diesem Axiomensystem genügt, die hyperbolische ebene Geometrie also widerspruchslos ist.

Im V. Abschnitt werden nun in diesem Kreismodell die Grundzüge der hyperbolischen Geometrie hergeleitet. Behandelt sind u. a. randparallele und überparallele Geraden, Abstandslinien, Winkelsumme im Dreieck, Parallelwinkel, Fundamentalkonstruktionen, merkwürdige Punkte des Dreiecks, Trigonometrie, Dreiecksinhalt, Umfang und Flächeninhalt des Kreises, asymptotische Dreiecke, Grenzkreise.

Der VI. Abschnitt ist Schlußbetrachtungen gewidmet. Zunächst wird man durch Andeutungen darüber beruhigt, daß die hergeleiteten Sätze vom benutzten Modell unabhängig sind, also tatsächlich zum Bestande der hyperbolischen Geometrie gehören. Dann wird das Wesen der elliptischen Geometrie gestreift und endlich das Verhältnis der Geometrie zur Wirklichkeit kurz auseinandergesetzt.

*Paul Szász* (Budapest)

**Jacqueline Lelong-Ferrand, Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée** (Cahiers scientifiques, fasc. 22), VII + 257 pages, Paris, Gauthiers-Villars, 1955.

The author investigates the properties of conformal mapping by neglecting intentionally its analytical character. In this way it is possible to state most of the results in a form which is valid for a class of mappings, larger than the class of conformal mappings. Two classes among these play the most important rôle, namely the class of quasi-conformal mappings, respectively the class of mappings, defined by functions having continuous partial derivatives, and bounded Dirichlet-integrals.

Chapter I deals with the properties of mappings, defined by functions with bounded Dirichlet-integral. (Making use of the noneuclidean, spherical metric, one can extend this property also to mappings defined on unbounded regions.) Several theorems, proved by Grötzsch, Koebe, Lindelöf, Denjoy, Wolff, Grunsky, Bermant, and Goluzin for the case of conformal mappings, are extended to this much larger class of mappings. We point out the following interesting generalization of Fatou's theorem: A mapping with bounded Dirichlet-integral, defined in a circle, has a limit along almost all radiuses.

In Chapter II the author proves that, making certain semi-topological, semi-metrical additional restrictions concerning the mapping (besides the boundedness of the Dirichlet-integral, and the continuity of partial derivatives), one can estimate the module of continuity of the mapping.

Chapter III investigates the behaviour of topological transformations with bounded Dirichlet integral, at the boundary of the mapped region. Making use of the notion "Primende", introduced by Carathéodory, and introducing an adequate topology and metric, the author is able to define a module of continuity also at the boundary.

Chapter IV deals with the convergence of uniformly continuous sequences of transformations, investigated in the previous chapter, and extends a result of Carathéodory to the case of unbounded regions. Using this result, a new proof is given for the theorem of Ostrowski, concerning the preservation of the angle by conformal mapping at the boundary.

In Chapter V the author introduces the notion of "preholomorphic" lattice-function, and proves that it fits for the approximation of regular functions. (The preholomorphic lattice functions are strongly related to the preharmonic lattice functions, introduced by Philips, Wiener, and Bouligand). Using this notion, he gives a new proof for the fundamental theorem of conformal mapping, due to Riemann, as well as for its generalizations concerning $n$-uply, or infinitely connected regions.

Chapter VI deals with different deformation theorems, first of all with the Ahlfors inequality, with its sharpening, due to the author, and with the application of the latter to the problem of angular derivatives.

Chapter VII gives the generalization of some results of the first chapter, to the class of Beppo Levi—Nikodym, respectively to a restricted class, introduced by the author. In this chapter, methods of potential theory find their application.

The value of the monograph is increased by the historical notes at the end of each chapter. Unfortunately, even these notes give often no exact answer to the question, which results of the book are due to the author, and which to others.

*T. Kővári* (Budapest)

**Der Briefwechsel von Johann Bernoulli,** herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, Bd. I, 531 Seiten, Basel, Birkhäuser, 1955.

Die Basler Naturforschende Gesellschaft betrachtet die Herausgabe der Schriften der Basler Mathematiker des XVIII. Jahrhunderts (zwölf namhafte Gelehrten, unter ihnen vier Klassiker) als eine nationale Pflicht. Da die Gesamtausgabe der Euler (Leonhard Vater und Johann Albert Sohn) schon in Verwirklichung ist und die Gesellschaft schlägt vor, auch Niklaus Fuss' Arbeiten zu jener Sammlung anzuschliessen, umfaßt das endgültige Projekt der Herausgabe acht Trägern des Namens Bernoulli (in erster Linie Jakob I, Johann I und Daniel I) und Jakob Hermann.

Das ausführliche Vorwort des Herausgebers (Prof. O. Spiess) berichtet über die großangelegten und interessanten Vorarbeiten des Gesamtwerkes und gibt kurz das Editionsplan von ungefähr 22 Bänden (S. 80).

In den Teilen *A* und *B* des vorliegenden ersten Bandes der ersten Serie (Korrespondenzen) werden die Briefwechseln von Johann I Bernoulli mit dem Bruder Jakob I und dem Marquis de l'Hôpital publiziert; damit gelangen zur Öffentlichkeit die letzten Komponenten von dem Material, was aus den Briefaustauschen von Leibniz, Huygens, den Brudern Bernoulli und de l'Hôpital, den damaligen großen Mathematikern des Kontinents erhalten ist. Das Material ist sowohl aus rein mathematischem als auch historischem Gesichtspunkte von Interesse.

Teil *A* gibt die 4 erhaltenen Stücke der *privaten* Korrespondenz der Brüder (als Gegenteil ihrer gedruckten polemischen *offenen* Briefen) und die Rekonstruktion des ganzen Briefwechsels von dem Herausgeber. Den Hauptteil bildet die Korrespondenz mit dem Marquis, 26 Briefe von und 60 an Bernoulli.

Die vorkommenden Probleme gehören größtenteils der Geometrie, Mechanik, Optik und Reihenlehre an und werden mit der "neuen" Methode behandelt. "Die Lektüre all dieser Briefe — sagt die Einleitung und meint alle fünf erwähnten Gelehrten — läßt uns das Keimen der Ideen und ihren Reflex in den verschiedenen Persönlichkeiten geradezu dramatisch miterleben."

Die Publikation entdeckt auch die Wahrheit im Streite Johanns gegen den Marquis. Es wird aus den Briefen de l'Hôpitals nachgewiesen, daß dem von ihm verfaßten ersten Lehrbuche der Differentialrechnung „Analyse des infiniment petits" und seinen anderen Schriften Bernoullis persönliche und briefliche Unterweisungen zugrunde liegen. Eine der auffallendsten Angaben ist darüber Brief Nr. 20 des Marquis mit dem nackten Antrage: "je vous donnerai une pension de trois cent livres... je vous prierai de me donner par intervalles quelques heures de vôtre temps, pour travailler sur ce que je vous demanderai et de me communiquer aussi vos découvertes en vous priant en mesme temps de n'en faire point de part à d'autres..." (S. 202). Der Herausgeber kommt zur Konklusion: "Auf keinem Gebiet hat DE L'HÔPITAL tatsächlich die Wissenschaft mit neuen Gedanken bereichert. Bei der berühmten Regel, die noch heute seinen Namen trägt, stammen Problemstellung und Lösung ausschließlich von Johann BERNOULLI" (S. 155).

Teil *C* enthält 70 Briefe von und an Johann mit "kleinen" Korrespondenten; diese berühren nur selten mathematische Gegenstände. Der Anhang gibt verschiedene Verzeichnisse geschichtlichen und sachlichen Inhalts.

*T. Bakos* (Szeged)

**C. Carathéodory, Mass und Integral und ihre Algebraisierung.** Herausgegeben von P. FINSLER, A. ROSENTHAL und R. STEUERWALD. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Band 10.) 357 S., Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1956.

Seit 1938 begann C. CARATHÉODORY in mehreren Veröffentlichungen eine möglichst algebraisierte, auf verbandstheoreischer Grundlage aufgebaute Maß- und Integrationstheorie auszuarbeiten. Er arbeitete bis zu seinem Ableben an einer systematischen Darstellung dieser Theorie und es gelang ihm noch das Manuskript zu vollenden. P. FINSLER, A. ROSENTHAL und R. STEUERWALD übernahmen nach dem Ableben des Verfassers die schwere Aufgabe, die durch die lange Zeitdauer des Entstehens vom Manuskript verursachten Unstimmigkeiten zu beseitigen und die endgültige Form des Textes zu bestimmen.

In der algebraisierten Maß- und Integrationstheorie wird die Rolle der Punktmengen von abstrakten, mit denen der Punktmengen ähnlichen Ordnungs- und Verknüpfungseigenschaften axiomatisch versehenen Dingen, sogenannten Somen, übernommen. Diese werden als Elemente eines Booleschen Ringes definiert, d. h. eines algebraischen Ringes mit den Operationen der (der Bildung der symmetrischen Differenz von Punktmengen entsprechenden) Verbindung $A \dotplus B$ und der (der Bildung des gemeinsamen Teiles von Punktmengen entsprechenden) Multiplikation $AB$, in welchem jedes Element idempotent ist; das Nullelement bezeichnet man mit $O$. In einem solchen Ring wird die Operation der Vereinigung durch $A \ddot{+} B = A \dotplus B \dotplus AB$ und eine teilweise Ordnung durch $(A \subseteq B) \equiv (AB = A)$ definiert. Es stellt sich heraus, daß in dieser Ordnung die Somen $A$ und $B$ die kleinste gemeinsame Majorante $A \ddot{+} B$ und die größte gemeinsame Minorante $AB$ besitzen. Es wird dann noch die Existenz einer kleinsten gemeinsamen Majorante von einer beliebigen abzählbaren Menge $\{A_i\}$ von Somen postuliert und mit $\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{+} A_i$ bezeichnet; daraus folgert man die Existenz einer größten gemeinsamen Minorante $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$. Es wird gezeigt, daß diese Begriffe die bekannten formalen Eigenschaften der entsprechenden mengentheoretischen Begriffe besitzen. Diese grundlegenden Überlegungen bilden den Inhalt des ersten Kapitels.

Im zweiten Kapitel werden einige Klassen von Somenmengen behandelt, insbesondere die gegen die Verbindung und die endliche Vereinigung abgeschlossenen Somenringe und die außerdem noch gegen die abzählbare Vereinigung abgeschlossenen vollkommenen Somenringe. Dann werden die Homomorphien von vollkommenen Somenringen untersucht, und es wird ein Homomorphiesatz bewiesen, in welchem die Rolle der algebraischen Ideale durch „vollständige" vollkommene Teilringe $\mathfrak{R}$ (d. h. solche vollkommene Teilringe, bei denen aus $A \in \mathfrak{A}$, $A \subseteq B \in \mathfrak{R}$ immer $A \in \mathfrak{R}$ folgt) übernommen wird.

Am schwersten ist in der abstrakten Theorie die Einführung der Punktfunktionen. Die Grundlage dafür bildet der Gedanke, sie durch die Gesamtheit ihrer Urbildmengen $\{x : f(x) < y\}$ zu ersetzen. Zu diesem Zweck wird der Begriff einer *Somenskala* mit dem Definitionsbereich $M$ eingeführt, d. h. einer Schar von Somen $S(y) \subseteqq M$, die vom reellen Parameter $y$ wachsend abhängen: aus $y < z$ folgt $S(y) \subseteqq S(z)$. In der Menge der Somenskalen wird eine teilweise Ordnung definiert: für zwei Somenskalen $T, S$ soll $T \leqq S$ dann bestehen, wenn aus $y < z$ immer $S(y) \subseteqq T(z)$ folgt. Bestehen gleichzeitig die Relationen $T \leqq S$ und $S \leqq T$, so heißen $S$ und $T$ äquivalent. Eine *Ortsfunktion* mit dem Definitionsbereich $M$ wird nun als eine Klasse von äquivalenten Somenskalen definiert. Die Ortsfunktion $f$ heißt endlich, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dot{+}\, S(n) = M$ und $\prod\limits_{n=1}^{\infty} S(-n) = O$ für eine beliebige ihrer Somenskalen gilt. Die teilweise Ordnung der Somenskalen erzeugt eine teilweise Ordnung der Ortsfunktionen. Für eine abzählbare Menge $\{f_i\}$ von Ortsfunktionen existiert in dieser teilweise Ordnung immer eine kleinste Majorante $\sup f_i$ und eine größte Minorante $\inf f_i$. Ist $f$ eine Ortsfunktion mit dem Definitionsbereich $M$ und ist $X \subseteqq M$, so werden durch $\alpha(X) = \sup\{y : XS(y) = O\}$ und $\beta(X) = \inf\{y : XS(y) = X\}$ die untere und obere Grenzen von $f$ auf $X$ definiert. Es werden die Eigenschaften der Funktionen $\alpha(X)$ und $\beta(X)$ behandelt, und es wird ein Satz von A. Bischof bewiesen, der notwendige und hinreichende Bedingungen angibt dafür, daß zwei gegebene Somenfunktionen die untere und obere Grenzfunktionen einer Ortsfunktion sind.

Im vierten Kapitel handelt es sich um das Rechnen mit Ortsfunktionen. Die Definitionen von $\overline{\lim} f_n$, $\underline{\lim} f_n$ und $\lim f_n$ und der Beweis der bekannten formalen Eigenschaften dieser Begriffe ergeben sich leicht mit Hilfe der Begriffe $\sup f_n$ und $\inf f_n$. Nicht so einfach ist die Frage nach der Zusammensetzung von Ortsfunktionen. Dazu betrachte man eine reelle, endliche Funktion $\chi(u_1, \ldots, u_m)$ von $m$ reellen Veränderlichen; ist $v_j \leqq w_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, so bezeichne man mit $\psi(v_j, w_j)$ bzw. $\Psi(v_j \leqq w_j)$ die untere bzw. obere Grenze der Zahlen $\chi(u_1, \ldots, u_m)$, wenn die Veränderlichen $u_j$ den Bedingungen $v_j \leqq u_j \leqq w_j$ unterworfen sind. Sind nun $f_1, \ldots, f_m$ endliche Ortsfunktionen mit dem gemeinsamen Definitionsbereich $M$ und mit den Grenzfunktionen $\alpha_j(X)$, $\beta_j(X)$ $(j = 1, \ldots, m)$, so gibt es eine und nur eine Ortsfunktion $g$ mit den Grenzfunktionen $\alpha(X)$, $\beta(X)$, so daß

$$\psi(\alpha_j(X), \beta_j(X)) \leqq \alpha(X) \leqq \beta(X) \leqq \Psi(\alpha_j(X), \beta_j(X))$$

für $X \subseteqq M$ gilt. Diese Ortsfunktion $g$ bezeichnet man mit $\chi(f_1, \ldots, f_m)$ und es wird gezeigt, daß diese Definition die gewöhnlichen Rechenregeln gewährt. Insbesondere kann man nun von Summen und Produkten von endlich vielen endlichen Ortsfunktionen sprechen.

Das fünfte Kapitel ist hauptsächlich der Untersuchung von *Maßfunktionen* gewidmet. So wird eine nichtnegative, nicht notwendig endlichwertige Somenfunktion $\varphi(X)$ genannt, wenn sie auf einem wollkommenen Ring $\mathfrak{A}$ definiert ist, $\varphi(O) = 0$ gilt und aus $B \in \mathfrak{A}$, $A_i \in \mathfrak{A}$, $B \subseteqq \Sigma \dot{+} A_i$ immer $\varphi(B) \leqq \Sigma \varphi(A_i)$ folgt. Auf die Maßfunktionen wird die klassische, vom Verfasser stammende Theorie der Meßbarkeit angewendet und es wird bewiesen, daß eine Maßfunktion auf dem vollkommenen Ring der für sie meßbaren Somen volladditiv ist (d. h. aus $A_i A_j = O$ für $i \neq j$ immer $\varphi(\Sigma \dot{+} A_i) = \Sigma \varphi(A_i)$ folgt, wenn nur die Somen $A_i$ meßbar für $\varphi$ sind). Als Beispiel wird der Borel—Lebesguesche Inhalt behandelt.

Im sechsten Kapitel werden die für eine Maßfunktion $\varphi$ meßbaren Ortsfunktionen definiert und dann das Integral, zuerst für nichtnegative Ortsfunktionen, erklärt. Zu diesem Zweck betrachten wir eine Maßfunktion $\varphi$ und eine für $\varphi$ meßbare, nichtnegative Ortsfunktion $f$ mit den Grenzfunktionen $\alpha(X)$ und $\beta(X)$, deren Definitionsbereich $M$ Vereinigung von abzählbar vielen, für $\varphi$ meßbaren Somen mit endlichem Maß ist. Dann gibt es eine und nur eine Maßfunktion $\psi$, welche für $X \subseteq M$ definiert ist und folgende Eigenschaften besitzt: jedes für $\varphi$ meßbare Soma ist auch für $\psi$ meßbar, aus $\varphi(X)=0$ folgt $\psi(X)=0$, endlich gilt

$$\alpha(X)\,\varphi(X) \leqq \psi(X) \leqq \beta(X)\,\varphi(X)$$

für $X \subseteq M$ und $0<\varphi(X)<+\infty$. Die Maßfunktion $\psi$ wird nun das *Integral* von $f$ für die Maßfunktion $\varphi$ genannt. Das Integral von Ortsfunktionen von beliebigem Vorzeichen wird durch Zerlegung auf positiven und negativen Teil erklärt. Nach den formalen Eigenschaften des Integrals (Linearität, usw.) folgen der Satz von Nikodym und, schon im siebenten Kapitel, die Sätze von der Integration von Funktionsfolgen (Sätze von Egoroff, Levi, Lebesgue, Fatou). Dann wird die Konvergenz im Mittel behandelt und ein Beweis für den Hauptsatz von Birkhoff der Ergodentheorie dargestellt.

Das achte Kapitel beginnt mit folgender Bemerkung. Wird auf einer, das leere Soma $O$ enthaltenden Teilmenge $\mathfrak{B}$ eines vollkommenen Ringes $\mathfrak{A}$ eine nichtnegative, endliche Somenfunktion $p(U)$ mit $p(O)=0$ beliebig vorgeschrieben, so existiert immer auf $\mathfrak{A}$ eine maximale Maßfunktion $\psi$, die für $U \in \mathfrak{B}$ der Bedingung $\psi(U) \leqq p(U)$ genügt und die eindeutig durch

$$\psi(X)=\inf\Big(\sum_j p(U_j)\colon U_j \in \mathfrak{B},\ \sum_j \dotplus U_j \supseteq X\Big)$$

definiert ist. Entsteht nun eine Maßfunktion $\psi$ durch die soeben beschriebene Konstruktion und gilt $p(U)=\psi(U)$ für $U \in \mathfrak{B}$, so heißt $\mathfrak{B}$ eine Basis der Maßfunktion $\psi$. Besitzt eine Maßfunktion $\mu^*$ eine lauter aus für sie meßbaren Somen bestehende Basis, so heißt sie eine *reguläre Maßfunktion* oder ein *äußeres Maß*. Auf solche kann man die von J. Ridder stammende Theorie der adjungierten Somenfunktionen anwenden und innere Maße definieren. Die Untersuchung der äußeren und inneren Maße bildet den Gegenstand des neunten Kapitels.

Im zehnten Kapitel werden *gleichartige* äußere Maße, d. h. äußere Maße mit gemeinsamem Definitionsbereich $\mathfrak{A}$ und Basis $\mathfrak{B}$ untersucht. An dieser Gelegenheit wird die Jordansche Zerlegung der totaladditiven Somenfunktionen von beschränkter Variation behandelt. Das letzte Kapitel wird der Untersuchung der Inhaltsfunktionen gewidmet, insbesondere dem Borel—Lebesgueschen Inhalt und dem Lebesgueschen Integral, für das der Vitalische Überdeckungssatz und der Satz von Lebesgue über die Differentiation des unbestimmten Integrals bewiesen werden. Auch wird das lineare Maß von mehrdimensionalen Punktmengen behandelt.

Ein Anhang bringt ein anderes, auf dem Begriff der teilweise geordneten Mengen begründetes Axiomensystem für die Somen. Seine Äquivalenz mit dem früheren wird gezeigt und dann wird es auf die Konstruktion eines vollkommenen Somenringes angewendet, der keinem $\sigma$-Ring von Mengen isomorph ist.

Im Obigen konnten wir die Gedanken und Methoden des Buches nur in den Hauptlinien verfolgen, viele interessante Einzelheiten mußten weggelassen werden. Es ist bedauernswert, aber durch die Entstehungsumstände des Buches erklärbar, daß im Gegensatz zu den sehr klar geschriebenen ersten Kapiteln, die späteren etwas weniger sorgfältig ausgearbeitet sind. Z. B. wird die Tatsache, daß man die Summe nur von endlichen Ortsfunktionen erklärt hat, oft außer Acht gelassen, was aber glücklicherweise zu keinen ernsten Schwierigkeiten führt. Satz 5 unter Ziffer 244, S. 268 ist im angegebenen Wortlaut unrichtig, wird aber richtig, wenn man noch voraussetzt, das $K$ meßbar für $\mu^*$ und jedes Soma $X \in \mathfrak{A}$ mit abzählbar vielen Somen aus $\mathfrak{B}$ überdeckbar ist, was zu den späteren Anwendungen genügt. Trotz diesen kleineren Unstimmigkeiten ist das vorliegende Buch, der Schwanengesang des ausgezeichneten Gelehrten, gewiß ein Gewinn ersten Ranges der maßtheoretischen Literatur.

*Ákos Császár* (Budapest)

# On a characterization of the classical orthogonal polynomials.

By L. FELDMANN in Budapest.

**1.** We call classical orthogonal polynomial systems the Jacobi, Laguerre and Hermite polynomial systems, respectively all systems which can be derived from these by means of linear transformations of the variable. A common feature of all these orthogonal polynomial systems is that for each of them there exists a differential equation of the following form:

$$a(x)y''+b(x)y'=\lambda y \tag{1. 1}$$

which is satisfied by all polynomials $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ of the system, and a corresponding sequence $\lambda_0(=0), \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ of values of the parameter $\lambda$.

Other orthogonal polynomial systems, satisfying in this sense a differential equation similar to (1. 1), are not known. In our present paper we shall prove that no such systems — beyond the three classical systems — exist.

The possibility to characterize the clàssical orthogonal polynomials as the only solutions of equation (1. 1) among orthogonal polynomials has been proposed by J. ACZÉL.[1])

[1]) J. ACZÉL, Eine Bemerkung über die Charakterisierung der „klassischen" orthogonalen Polynome, *Acta Math. Hung.*, 4 (1953), 315—321. The problem can be formulated also as follows: Determine the solutions $\{y, \lambda\}$ of equation (1. 1), but instead of the usual boundary conditions put the condition that $y$ be a polynomial. In which case can now a system of solutions $\{p_n, \lambda_n\}$ be found, such that $\{p_n\}$ is an orthogonal system with respect to a non-negative weight function?

A similar problem has been dealt with by the author in his paper „Über durch Sturm—Liouvillesche Differentialgleichungen charakterisierte orthogonale Polynomsysteme", *Publicationes Math. Debrecen,* 3 (1954), 297—304.

The first and second theorems of the present paper however express more and use different proofs as loc. cit.

**2.** Suppose that (1. 1) has the solutions $\{p_i, \lambda_i\}$ $(i=1,2,\ldots)$ where $p_i$ is a polynomial of $i^{\text{th}}$ degree, with the main coefficient 1. Then we have, for an arbitrary solution $\{y, \lambda\}$,

$$(2.1) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\lambda_1 p_1 \\ 2 & p_2' & -\lambda_2 p_2 \\ y'' & y' & -\lambda y \end{vmatrix} = 0.$$

By comparing (2. 1) and (1. 1) it can be seen that $a(x)$ can be a polynomial of not higher than second degree, while $b(x)$ represents a polynomial of exactly first degree (if $\lambda_1 \neq 0$). Thus by means of a suitable linear transformation of the variable $x$ the differential equation (1. 1) takes on the form

$$(2.2) \qquad Qy''+xy'=\lambda y \quad \text{with} \quad Q=ax^2+bx+c.$$

Here $\lambda$ can be expressed as a function of $n$ by substituting the polynomial $p_n$ into equation (2. 2) and equating the coefficients of $x^n$ on both sides. Thus we obtain

$$(2.3) \qquad \lambda_n = n(n-1)a+n \quad \text{with} \quad n \geqq 2.$$

It is known that the classical polynomial systems satisfy the following differential equations. Jacobi polynomials:

$$(2.4) \qquad (x^2-1)y''+[(\alpha+\beta+2)x+\alpha-\beta]y' = n(\alpha+\beta+n+1)y$$
$$\alpha>-1,\ \beta>-1;$$

Laguerre polynomials:

$$(2.5) \qquad -xy''+(x-\alpha-1)y' = ny, \qquad \alpha>-1;$$

Hermite polynomials:

$$(2.6) \qquad -y''+2xy' = 2ny.$$

Substituting $x=\dfrac{1}{\alpha+\beta+2}x'+\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+2}$ equation (2. 4) reduces to (2. 2), similarly the substitutions $x=x'+\alpha+1$ and $x=\dfrac{x'}{2}$ reduce (2. 5) and (2. 6), respectively, to (2. 2). It can be directly seen that in the equation (2. 2) thus obtained we have

$$(2.7) \qquad a \geqq 0 \quad \text{and} \quad c<0.$$

One verifies by a simple but longer reckoning that the only polynomial solutions of (2. 2) with (2. 7) are essentially the classical polynomials (see the cited paper of the author, pp. 300—301).

3. We prove that, among all orthogonal polynomial systems, the classical polynomial systems are the only ones which satisfy a differential equation of the type (1. 1).

Theorem 1. *Among the orthogonal polynomial systems only the three classical ones can satisfy an equation of type* (1. 1) *so, that each polynomial of the system represents a solution of the same differential equation for different* $\lambda$ *values.*

We shall be able to prove even a *stronger* theorem [2]):

Theorem 2. *Let* $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ *be polynomials of precisely* $0^{th}$, *first,* $\ldots$, $n^{th}$ *degree,* $\ldots$. *Further let the zeros of the system* $\{p_n\}$ *be distinct, real and separated. This last property means that, denoting the* $k^{th}$ *zero of* $p_n$ *by* $\alpha_{nk}$ *we have*

$$\alpha_{n+1,1} < \alpha_{n1} < \alpha_{n+1,2} < \alpha_{n2} < \cdots < \alpha_{nn} < \alpha_{n+1,n+1}. \tag{3.1}$$

*If each polynomial of the system* $\{p_n\}$ *represents a solution of the differential equation* (1. 1) *with the corresponding parameter values* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$, *then the system* $\{p_n\}$ *cannot be but one of the three classical orthogonal systems.*

Proof. a) If $\lambda_1 \neq 0$ then, according to paragraph 2, the only polynomial solutions of the equation (2. 2) with (2. 7) are the classical polynomials. It can be directly seen that in (2. 2) $p_1 = x$ and $\lambda_1 = 1$.

b) By (2. 3) it can be stated that *the condition* $a \geqq 0$ *is equivalent to the condition* $\lambda_n > 0$ *(with* $n \geqq 2$*).*

By a) and b) it will be sufficient to prove that if condition (3. 1) holds for the zeros of $\{p_n\}$ then for the corresponding differential equation in its form (2. 2) we have

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_n > 0 \quad (\text{for } n \geqq 2) \tag{A}$$

and

$$c < 0. \tag{B}$$

Proof of (A). Similarly to (2. 1) we can write for the solutions $p_1, p_n$ and $p_{n+1}$ the following equation:

$$D(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\lambda_1 p_1 \\ p_n'' & p_n' & -\lambda_n p_n \\ p_{n+1}'' & p_{n+1}' & -\lambda_{n+1} p_{n+1} \end{vmatrix} = 0. \tag{3.2}$$

---

[2]) In fact, the zeros of a system of orthogonal polynomials having a non-negative weight function are distinct, real and separated.

With this expression we may derive relations between $\lambda_n$ and the coefficients of $p_n$ and $p_{n+1}$, respectively.

Introducing the substitution $x' = x + \alpha_{n+1,1}$ in $D(x)$, $D(\alpha_{n+1,1})$ will reduce to a very simple form, and the polynomials

$$p_n(x+\alpha_{n+1,1}) = p_n^{*}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}x^k$$

will have only non-negative zeros in consequence of (3. 1). We denote the roots of these polynomials again by

$$\alpha_{n+1,1} = 0 < \alpha_{n,1} < \alpha_{n+1,2} < \alpha_{n,2} < \cdots < \alpha_{nn} < \alpha_{n+1,n+1}$$

and have

$$D(\alpha_{n+1,1}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\lambda_1 a_{10} \\ 2a_{n2} & a_{n1} & -\lambda_n a_{n0} \\ 2a_{n+1,2} & a_{n+1,1} & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{3. 3}$$

Here $\lambda_n$ is identical to the $\lambda_n$ figuring in (3. 2), because $\lambda_n$ is a function of $a$ and $n$ only, but the latter remain unchanged after the linear substitution mentioned. It can be seen from (3. 3) that $\lambda_1 \neq 0$, for if $\lambda_1 = 0$, (3. 3) would mean $\lambda_n a_{n0} a_{n+1,2} = 0$ i. e. $\lambda_n = 0$, the roots $\alpha_{nk}$ being positive. This is however impossible. Thus $\lambda_1 \neq 0$ and we can assume that $\lambda_1 = 1$.

Developing $D(\alpha_{n+1,1})$ and expressing (partly) its polynomial coefficients as elementary symmetric functions of the roots, we obtain

$$\frac{a_{n+1,2}a_{n0}}{a_{10}}\lambda_n = \sum_{\binom{n}{n-1}} \overbrace{\alpha_{n1}\dots\alpha_{nn}}^{n-1} \cdot \sum_{\binom{n}{n-1}} \overbrace{\alpha_{n+1,2}\dots\alpha_{n+1,n+1}}^{n-1} - \alpha_{n+1,2}\dots\alpha_{n+1,n+1}\cdot\sum_{\binom{n}{n-2}} \overbrace{\alpha_{n1}\dots\alpha_{nn}}^{n-2}. \tag{3. 4}$$

Here the notation $a_{nk} = (-1)^{n+k}\sum_{\binom{n}{n-k}} \overbrace{\alpha_{n1}\dots\alpha_{nn}}^{n-k}$ has been used.[3])

All $\alpha_{nk}$ values being positive, the sign of the coefficients $a_{nk}$ will depend only on $n+k$ being even or odd. Thus the coefficient of $\lambda_n$ must be positive in (3. 4). It remains only to prove that the right side of (3. 4) is also *positive.*

Let I be the first sum (of positive sign) and II be the second (of

---

[3]) More explicitly $\sum_{\binom{n}{n-k}} \overbrace{a_{n1}\dots a_{nn}}^{n-k}$ will mean that, taking $n-k$ different elements of the set $\{\alpha_{n1}, \dots, \alpha_{nn}\}$, they are multiplied, and the possible $\binom{n}{n-k}$ products are summed.

negative sign). We shall establish a correspondence between II and I in the following way: Delete from the set

(3.5) $$\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nn}, \alpha_{n+1,2}, \ldots, \alpha_{n+1,n+1}$$

the elements $\alpha_{nk}$ and $\mu_{ni}$ $(k < i)$ and multiply the remainder with each other. We thus obtain a term of II (defined by the indices $i, k$). To this term we let correspond the term of the sum I which can be obtained by deleting the elements $\alpha_{nk}$ and $\alpha_{n+1,i}$ of the set (3.5) and multiplying the remaining elements. Thus for every term of sum II a corresponding term of I can be found. Every term of the sum I having a greater absolute value then the corresponding term of II, the right hand side of (3.4) must be positive.

Thus our statement concerning $\lambda_n > 0$ (with $n \geqq 2$) has been proved.

Proof of (B). As in equation (2.2) the zeros of $p_1 = x$ and of the solution $p_2$ are separated (in the sense already explained), thus $p_2(0) < 0$.

On the other side, we obtain by (2.1) (taking $p_1 = x$)

$$\lambda_2 p_2 - \lambda_1 x p_2' = Q = ax^2 + bx + c$$

and thus

$$\lambda_2 p_2(0) = c.$$

Since $\lambda_2 > 0$, (B) must also hold.

*(Received January 6, 1956.)*

# On a useful lemma for abelian groups.

By L. FUCHS in Budapest.

**I.** This note is mainly of methodical character. It has for its origin the observation that, in the theory of abelian groups, if one has to prove the direct summand property of a given subgroup $H$, then the arguments are the same in all cases: one starts with the zero subgroup or with some appropriate subgroup of the given group[1]) $G$, extends it to a subgroup $M$ maximal with respect to the property of disjointness from $H$, and then tries to prove that the assumption that $H+M$ [2]) is a proper subgroup of $G$ leads to a contradiction. In order to avoid superfluous repetitions, it is natural to try to get a lemma from which the results of the mentioned kind may be obtained without repeating the common inferences.

An observation of this type is due to I. KAPLANSKY; in his booklet [2, p. 8] he has called the attention to the fact that — using the same notations as above — $G/(H+M)$ is necessarily a torsion group. Our lemma is a far-reaching generalization of this remark: it not only tells us that $G/(H+M)$ is a torsion group, but it establishes an isomorphism between the $p$-layer[3]) of $G/(H+M)$ and some subgroup of $H/pH$. The application of our lemma then reduces to the proof that this subgroup of $H/pH$ collapses to 0. We shall also see that our lemma may successfully be applied to verifying certain properties of the factor group $G/(H+M)$ also when $H$ is no direct summand, and to solve a problem concerning direct summands in a certain stricter sense than usual.

**II.** Now let us formulate:

Lemma. *Let $G$ be an abelian group, $H$ a subgroup of $G$ and $M$ an arbitrary subgroup of $G$ with the properties: $M\cap H=0$; $M\subset N$ implies $N\cap H\neq 0$. Then the group $G^*=H+M$ satisfies:*

---

[1]) Since we shall deal throughout with abelian groups only, we may write "group" for the longer term "abelian group".

[2]) The sign $+$ denotes (besides group operation) direct sum.

[3]) The $p$-layer of a group $G$, in sign $G[p]$, consists of all elements $x$ of $G$ for which $px=0$. ($p$ denotes always a prime number.)

(a) $G/G^*$ *is a torsion group;*

(b) $(G/G^*)[p] \cong (\{pG, M\} \cap H)/pH.$

In particular, (b) implies that $(G/G^*)[p]$ is isomorphic to some subgroup of $H/pH$.

Proof. (a) is almost evident (see [1]): $x \in G, x \notin G^*$ implies $\{x, M\} \cap H \neq 0$, i. e. we have $h = nx + m \neq 0$ ($h \in H, m \in M$, $n$ integer), $nx = h - m \in G^*$. The hypothesis $M \cap H = 0$ guarantees that $n \neq 0$.

To prove (b), observe that all the elements $\neq 0$ of both groups in consideration are of order $p$. Now let[4]) $\bar{x} \in (G/G^*)[p]$, then $px = h + m$ ($h \in H, m \in M$) and clearly $h = -px + m \in \{pG, M\} \cap H = H_1$. Consider the correspondence $x \to h$. If $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, then $x_1 \to h_1$ and $x_2 \to h_2$ imply $h_1 \equiv h_2$ (mod $pH$); in fact, from $px_1 = h_1 + m_1, px_2 = h_2 + m_2$ and $x_1 - x_2 = h_3 + m_3$ ($h_3 \in H, m_3 \in M$) we conclude $ph_3 + pm_3 = (h_1 - h_2) + (m_1 - m_2)$, that is, $h_1 - h_2 = ph_3 \in pH$. On the other hand, under $x \to h$ all of $H_1/pH$ is exhausted, for if $h \in \{pG, M\} \cap H, h \notin pH$, then $h = py - m$ ($y \in G, m \in M$), and here $y \notin G^*$, because $y = h' + m'$ ($h' \in H, m' \in M$) would imply $py = ph' + pm' = h + m, h = ph' \in pH$; thus $y \to h$. Further, if $x_1 \to h_1$, $x_2 \to h_2$ and $h_1 \equiv h_2$ (mod $pH$), then $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. For putting $px_i = h_i + m_i$ ($h_i \in H, m_i \in M$), $h_1 - h_2 = ph$ ($h \in H$), in case $x_1 - x_2 - h \in M$ we get $x_1 - x_2 \in H + M = G^*$ and are therefore ready. In case $x_1 - x_2 - h \notin M$ there is a nonzero element $z$ in $\{M, x_1 - x_2 - h\} \cap H$; $z = m + k(x_1 - x_2 - h)$ ($m \in M$) where on account of $p(x_1 - x_2 - h) = m_1 - m_2 \in M$ we must have $(k, p) = 1$ (otherwise we should obtain $z \in M \cap H = 0$). Now from $k(x_1 - x_2 - h) \in H + M$ and $p(x_1 - x_2 - h) \in M$ we are led to $x_1 - x_2 - h \in H + M$, $x_1 - x_2 \in G^*$. The correspondence $x \to h$ between $(G/G^*)[p]$ and $H_1/pH$ is therefore one-to-one. Since it carries sums into sums, we arrive at the desired isomorphism.

**III.** Now let us consider some applications of the Lemma.

1. If $H$ is a complete group, i.e. $pH = H$ for every prime $p$, then Lemma tells us that every $p$-layer of $G/G^*$ vanishes, i.e. $G^* = G$. Consequently, *a complete group is a direct summand of every containing group*[5])

2. For any $H$ we get that the $p$-component of the factor group $G/G^*$ is at most of power[6]) $|H/pH| \cdot \aleph_0$, thus

$$|G/G^*| \leqq \aleph_0 \cdot \sum_p |H/pH|.$$

---

[4]) The bar will indicate cosets modulo $G^*$.

[5]) This is a well-known result, see Baer [1], Kurosh [4] or Kaplansky [2].

[6]) For a set $S$, we denote by $|S|$ the power of $S$.

Hence it also follows:

$$|G/G^*| \leqq \aleph_0 \cdot |H|.$$

(The main interest of these inequalities lies in the fact that they are for every $G$ containing $H$.)

3. Let $H$ be a cyclic $p$-group, $H \cong \mathfrak{C}(p^n)$. Then Lemma implies that $G/G^*$ is a $p$-group which either vanishes or has the layer $\mathfrak{C}(p)$. Therefore $G/G^* \cong \mathfrak{C}(p^k)$ with $0 \leqq k \leqq \infty$.[7])

4. If $H$ is an infinite cyclic group, then $G/G^*$ is isomorphic to some subgroup of the group $\mathfrak{C}$ of all finite rotations of the circle.

5. Let $G$ be a serving subgroup of the additive group of $p$-adic numbers and $H$ a serving subgroup of $G$. Then $H/pH \cong \mathfrak{C}(p)$ and $qH = H$ for all primes $q \neq p$. Since $G$ is known to be directly indecomposable,[8]) we have $G/G^* \cong \mathfrak{C}(p)$.

6. Next let $G$ be the complete direct sum of the cyclic groups of prime order $\mathfrak{C}(2), \mathfrak{C}(3), \ldots, \mathfrak{C}(p), \ldots$ and $H$ the discrete direct sum of the same groups. Then $H$ is the torsion subgroup of $G$; the factor group $G/H$ is complete and therefore $H$ is not a direct summand of $G$. Now $G/G^*$ is again complete (as a homomorphic image of $G/H$) and — on using Lemma — it is easy to see that $G/G^* \cong \mathfrak{C}$, the group of all finite rotations of the circle.

7. Let $G$ be a $p$-group with elements of bounded order $\leqq p^n$, let $a$ denote an element of order $p^n$ and $H = \{a\}$. We have $p^{n-1}H_1 \subseteq \{p^n G, p^{n-1}M\} \cap p^{n-1}H = p^{n-1}M \cap p^{n-1}H = 0$, consequently $H_1 \subseteq \{pa\} = pH$. This implies that $\{a\}$ *is a direct summand of* $G$.

8. We proceed to consider the case when $G$ is arbitrary, and $H$ is a serving subgroup of $G$ and is the direct sum of cyclic groups of the same order $p^n$. Since, by servingness, $p^n G \cap H = p^n H = 0$, we may choose $M$ subject to the restriction $p^n G \subseteq M$. Then we have:

$$p^{n-1}H_1 \subseteq \{p^n G, p^{n-1}M\} \cap p^{n-1}H \subseteq M \cap p^{n-1}H = 0,$$

and this implies, owing to $H \cong \Sigma\, \mathfrak{C}(p^n)$, that $H_1 \subseteq pH$. In conclusion, $H$ is a direct summand of $G$. Hence it follows KULIKOV's result [3]: *a serving subgroup of bounded order is always a direct summand.*

Let us observe that the same argument establishes also the main result of SZELE's paper [5].

9. Let $G$ be a $p$-group, and $H$ a serving subgroup of $G$ such that $H$ contains $(p^n G)[p]$, but no element of $G[p]$ not in $(p^{n-1}G)[p]$, i. e. from the

[7]) $\mathfrak{C}(p^\infty)$ is PRÜFER's group of type $p^\infty$.

[8]) See e. g. KUROSH [4].

layer of $G$ it contains each element of height $\geqq n$, but no element of height $\leqq n-2$. If $H+M\subset G$, then take an $h=pg+m(g\in G, m\in M)$ in $H$ but not in $pH$, of a possible least order $p^s$. Then $p^s g+p^{s-1}m= =p^{s-1}h\neq 0$ implies $p^{s-1}m\neq 0$, for in the contrary case, by the servingness of $H$, we should have $p^{s-1}h=p^s h'(h'\in H)$ and $h-ph'$ would be an adequate element of a less order than $h$. Thus the height of $p^{s-1}h$ in $G$ is exactly $s-1$, whence $s\geqq n$. Further, obviously, $p^s g$ is of order $p$ (for $p^s h=p^s m=0$), and hence from $s\geqq n$ and the hypothesis on $H$ it results $p^s g\in H$. But then $p^{s-1}h=p^s g+p^{s-1}m$ implies $p^{s-1}m=0$, a contradiction. Therefore, $H$ is a direct summand of $G$. — Of course, a similar result holds for torsion groups.

10. We turn our attention to the following problem.

Let $G$ be an abelian group; *find all subgroups $H$ of $G$ which are direct sumands in the strict sense that for every maximal $M$ with $M\cap H=0$ one has $G=H+M$.* — We have seen that the complete subgroups $H$ are always direct summands in this strict sense too. The same is true for the group $H$ in 9.

Suppose $G=H+K$ and $M$ is maximal with respect to the property of disjointness from $H$. If $H+M\subset G$, then there exists a prime $p$ such that $H_1=\{pG, M\}\cap H\supset pH$, i. e. there is an $h=pk+m\in H(k\in K, m\in M)$ with $h\notin pH$.

Assume $k$ is of finite order $p^t s$ with $(p,s)=1$; then we have again $sh=p(sk)+sm\in H$, $sh\notin pH$, consequently, we may suppose $h$ so to be chosen that the order of $k$ is a prime power $p^t$. Now $t\geqq 2$, for $h\in M$ is impossible. By multiplication by $p^{t-1}$ we get $p^{t-1}h=p^t k+p^{t-1}m=p^{t-1}m$, whence $p^{t-1}h=0$ and so[9] $O(h)<O(k)$. — Conversely, if $H$ and $K$ contain elements $h$ and $k$, respectively, such that $O(h)<O(k)=p^t$ and $h\notin pH$, then $H$ is no direct summand in the strict sense. In fact, we first show that $\{h-pk\}\cap H=0$ holds. For $p^r(h-pk)\in H$ implies $p^{r+1}k\in H$, $p^{r+1}k=0$, $t\leqq r+1$, $p^r h=0$ and $p^r(h-pk)=0$. Therefore, we can choose an $M$ with $h-pk\in M$. But then $h=pk+(h-pk)\in\{pG, M\}\cap H$, $h\notin pH$ and Lemma implies $H+M\subset G$.

Next assume $k$ is of infinite order. Then there is no need to get further properties of $k$, considering that, conversely, in case $K$ contains an element $k$ of infinite order, then for every $h\in H$, $h\notin pH$ one has $\{h-pk\}\cap H=0$, and again $H+M\subset G$ provided $M$ is chosen to contain $h-pk$.

---

[9]) By $O(x)$ we denote the order of the group element $x$.

Consequently, *a direct summand* $H$ *of* $G$, $G=H+K$, *satisfies* $G=H+M$ *for every* $M$ *maximal with respect to the property* $M\cap H=0$, *if and only if either*

1. $H$ *is a complete group, or*

2. $K$ *is a torsion group the elements of whose p-components are of order not exceeding the order of any* $h\in H$ *with* $h\notin pH$.

This result states that examples 1 and 9 essentially exhaust all cases in which $H$ is a direct summand in the stated stricter sense.

## Bibliography.

[1] R. Baer, The subgroup of elements of finite order of an abelian group, *Annals of Math.* (2), **37** (1936), 766—781.

[2] I. Kaplansky, *Infinite abelian groups,* University of Michigan Publ. in Math., Nr 2 (Ann Arbor, 1954).

[3] Л. Я. Куликов, К теории абелевых групп произвольной мощности, Мат. Сборник, **9** (51) (1941), 165—181.

[4] А. Г. Курош, Теория групп (Москва, 1953).

[5] T. Szele, On direct decompositions of abelian groups, *Journ. London Math. Soc.*, **28** (1953), 247—250.

(*Received April 7, 1956.*)

# Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen.

Von G. FODOR in Szeged.

Sei $\Lambda$ eine Ordnungszahl von zweiter Art, die nicht mit $\omega$ konfinal ist und $M$ eine Teilmenge der Menge $W(\Lambda)$ aller $\xi$, für die $\xi < \Lambda$ gilt. Auf $M$ sei eine transfinite Funktion $f(\alpha) < \alpha$ mit $\alpha \geqq 1$ (und $\varphi(0) = 0$ im Fall, daß $0 \in M$) definiert. Wir nehmen an, daß $M$ stationär ist. Im vorliegenden Artikel wollen wir uns mit dem folgenden Problem befassen.

Problem. *Gibt es immer eine Ordnungszahl $\beta < \Lambda$ und eine stationäre Teilmenge $N$ von $M$, so daß $f(\alpha) \leqq \beta$ für alle $\alpha \in N$ ist?*

Wir werden zeigen, daß die Lösung dieses Problems positiv ist.

Bei den Bedingungen dieses Problems gilt der folgende Satz:

a) *Es gibt eine Ordnungszahl $\beta < \Lambda$ und eine Menge der Ordnungszahlen $\alpha_\xi \in M$, die mit $M$ zusammengehörig ist, so daß $f(\alpha_\xi) \leqq \beta$ für alle $\alpha_\xi$ ist* (G. FODOR [7]).

Dieser Satz wurde vor der genannten Arbeit des Verfassers in den folgenden speziellen Fällen bewiesen:

1. $\Lambda = \omega_1$ und $M = W(\omega_1)$ (ALEXANDROFF und URYSOHN [1]),
2. $\Lambda = \omega_{\nu+1}$ und $M = W(\omega_{\nu+1})$ (BEN DUSHNIK [2]),
3. $M = W(\Lambda)$ (P. ERDÖS [3]),
4. $\Lambda = \omega_1$ und $M$ eine abgeschlossene Teilmenge von $W(\omega_1)$ (J. NOVÁK [4]),
5. $\Lambda$ eine reguläre Limeszahl (W. NEUMER [5]),
6. $M$ eine mit $W(\Lambda)$ ähnliche abgeschlossene Teilmenge von $W(\Lambda)$ (H. BACHMANN [6]).

Ferner gilt der Satz:

b) *Wenn $M$ nicht stationär ist, so läßt sich auf $M$ eine regressive Funktion $\varphi$ definieren, so daß für jedes $\beta < \Lambda$ die Menge der $\alpha \in M$, für die $\varphi(\alpha) \leqq \beta$ gilt, nicht-zusammengehörig mit $W(\Lambda)$ ist* (vgl. [6] § 9, Satz 2).

Wir brauchen folgende Definitionen und Bezeichnungen (vgl. z. B. [6]). Ist $\Lambda$ eine Ordnungszahl, so bedeute $W(\Lambda)$ die Menge aller Zahlen $\xi$, für die $\xi < \Lambda$ ist. Sind $M$ und $N$ zwei Teilmengen von $W(\Lambda)$ ohne Maximum, so heißen $M$ und $N$ *zusammengehörig*, wenn es zu jeder Ordnungszahl jeder

der beiden Mengen eine größere Ordnungszahl in der anderen Menge gibt. Sind $\mu$ und $\nu$ zwei Limeszahlen, so heißt $\mu$ *konfinal* mit $\nu$, wenn $\mu$ der Limes einer wachsenden Folge vom Typ $\nu$ ist. Ist $\alpha$ eine Limeszahl, so bedeute $cf(\alpha)$ den Index $\gamma$ der kleinsten Ordnungszahl $\omega_\gamma$, mit der $\alpha$ konfinal ist. Eine Teilmenge $M$ von $W(\Lambda)$ heißt in $W(\Lambda)$ *abgeschlossen*, wenn sie zu jeder Fundamentalfolge von Zahlen aus ihr auch deren Limes enthält, sofern dieser $<\Lambda$ ist. Eine in $W(\Lambda)$ abgeschlossene, mit $W(\Lambda)$ zusammengehörige Teilmenge von $W(\Lambda)$ heißt ein *Band* von $W(\Lambda)$. Eine Teilmenge $M$ von $W(\Lambda)$ heißt *stationär*, wenn $W(\Lambda)-M$ kein Band von $W(\Lambda)$ enthält. Eine auf einer Teilmenge $M$ von $W(\Lambda)$ definierte Funktion $\varphi$ heißt *regressiv*, wenn $\varphi(\xi)<\xi$ für alle Argumente $\xi\in M$ mit $\xi\geqq 1$ (und $\varphi(0)=0$ im Fall, daß $0\in M$).

Wir schicken folgenden Hilfssatz voraus:

Hilfssatz. *Sei $\Lambda$ eine Limeszahl mit $cf(\Lambda)>0$ (d. h. $\Lambda$ ist nicht mit $\omega$ konfinal), $\{K_\alpha\}_{\alpha<\tau}$ $(\tau\leqq\omega_{cf(\Lambda)})$ eine Folge vom Typ $\tau\leqq\omega_{cf(\Lambda)}$ von nichtleeren und paarweise disjunkten nicht-stationären Teilmengen von $W(\Lambda)$ und $x_\alpha$ das erste Element von $K_\alpha$ $(\alpha<\tau)$. Ist die Menge $U=\{x_\alpha\}_{\alpha<\tau}$ nicht-stationär, und im Falle $\tau=\omega_{cf(\Lambda)}$ mit $W(\Lambda)$ zusammengehörig, so ist die Menge $\bigcup\limits_{\alpha<\tau}K_\alpha$ nicht-stationär.*[1])

Beweis. Wenn $\varphi$ eine regressive Funktion auf $N\subseteqq W(\Lambda)$ ist, so bezeichnen wir mit $H_\varphi^\eta$ die Menge aller Ordnungszahlen $\mu$, für die $\varphi(\mu)\leqq\eta$ ist: $H_\varphi^\eta=\{\mu\in N:\varphi(\mu)\leqq\eta\}$. Nach b) existiert eine regressive Funktion $\psi$ auf $U$ und zu jedem $\alpha<\tau$ eine regressive Funktion $\varphi_\alpha$ auf $K_\alpha-\{x_\alpha\}$, so daß für jede $\mu<\Lambda$ die Menge $H_\psi^\mu$ bzw. $H_{\varphi_\alpha}^\mu$ $(\alpha<\tau)$ nicht-zusammengehörig mit $W(\Lambda)$ ist. Es sei für $\alpha<\tau$

$$g_\alpha(\xi)=\begin{cases}\varphi_\alpha(\xi) & \text{für } \xi\in K_\alpha-H_{\varphi_\alpha}^{x_\alpha}-\{x_\alpha\},\\ x_\alpha & \text{für } \xi\in H_{\varphi_\alpha}^{x_\alpha}.\end{cases}$$

Da die Menge $H_{\varphi_\alpha}^{x_\alpha}(\alpha<\tau)$ nicht-zusammengehörig mit $W(\Lambda)$ ist, so ist $g_\alpha$ für jedes $\alpha<\tau$ eine regressive Funktion auf $K_\alpha-\{x_\alpha\}$ mit $g_\alpha(\xi)\geqq x_\alpha$ für $\xi\in K_\alpha-\{x_\alpha\}$. Es sei weiter

$$g(\xi)=\begin{cases}\psi(\xi) & \text{für } \xi\in U,\\ g_\alpha(\xi) & \text{für } \xi\in K_\alpha-\{x_\alpha\} \text{ und } \alpha<\tau.\end{cases}$$

$g$ ist eine regressive Funktion auf $K=\bigcup\limits_{\alpha<\tau}K_\alpha$, so daß für jedes $\mu<\Lambda$ die Menge $H_g^\mu$ nicht-zusammengehörig mit $W(\Lambda)$ ist. Würde nämlich eine Zahl $\mu_0<\Lambda$ existieren, für die $H_g^{\mu_0}$ mit $W(\Lambda)$ zusammengehörig ist, so

[1]) Beim Beweis wird eine Modifikation eines Beweises von G. Bloch benutzt (vgl. [8], S. 266).

könnten die Elemente von $H_g^{\mu_0}$ entweder in $U$ oder in Mengen $K_\alpha - \{x_\alpha\}$ mit $x_\alpha \leqq \mu_0$ vorkommen, also gäbe es entweder in der Menge $U$ oder in einer Menge $K_{\alpha_0}$ mit $x_{\alpha_0} \leqq \mu_0$ eine mit $W(\Lambda)$ zusammengehörige Teilmenge von $H_g^{\mu_0}$, im Widerspruch zur Definition von $\psi$ bzw. $g_{\alpha_0}$.

Wir beweisen nun den

Satz 1. *Sei $\Lambda$ eine Limeszahl mit $cf(\Lambda) > 0$ (d. h. $\Lambda$ sei nicht mit $\omega$ konfinal) und $M$ eine Teilmenge von $W(\Lambda)$. Wenn $M$ stationär ist, so existiert zu jeder auf $M$ definierten regressiven Funktion $\varphi$ eine Ordnungszahl $\alpha < \Lambda$ und eine stationäre Teilmenge $N$ von $M$, so daß $\varphi(\beta) \leqq \alpha$ für alle $\beta \in N$ ist.*

Beweis. Wir betrachten ein Band $B = \{\beta_\nu\}_{\nu < \omega_{cf(\Lambda)}}$ vom Typ $\omega_{cf(\Lambda)}$ in $W(\Lambda)$, wobei $\beta_0 = 0$ ist. Wir bezeichnen mit $H_\nu$ die Menge aller Ordnungszahlen $\mu \in M$, für die $\beta_\nu \leqq \varphi(\mu) < \beta_{\nu+1}$ ist: $H_\nu = \{\mu \in M : \beta_\nu \leqq \varphi(\mu) < \beta_{\nu+1}\}$. Offenbar ist $H_\alpha \cap H_\tau = 0$ für $\alpha \neq \tau$. Da $B$ ein Band ist, da also $\lim_{\nu<\lambda} \beta_\nu = \beta_\lambda$ für jede Limeszahl $\lambda < \omega_{cf(\Lambda)}$ und $\lim_{\nu < \omega_{cf(\Lambda)}} \beta_\nu = \Lambda$ ist, so ergibt sich hieraus nach der Definition von $H_\nu$, daß

$$M = \bigcup_{\nu < \omega_{cf(\Lambda)}} H_\nu$$

ist. Sei nun $\{H_{\nu_\xi}\}_{\xi<\tau}$ $(\tau \leqq \omega_{cf(\Lambda)})$ die Folge der nicht-leeren Mengen $H_\nu$ und $y_{\nu_\xi}$ sei das erste Element von $H_{\nu_\xi}$ für alle $\xi < \tau$. Da $\varphi$ eine regressive Funktion ist, so ist $\beta_{\nu_\xi} < y_{\nu_\xi}$. Wir definieren nun auf der Menge $Y = \{y_{\nu_\xi}\}_{\xi<\tau}$ $(\tau \leqq \omega_{cf(\Lambda)})$ eine regressive Funktion $\psi$:

$$\psi(y_{\nu_\xi}) = \beta_{\nu_\xi}.$$

Man sieht sofort, daß $\psi(\alpha) \neq \psi(\beta)$ ist, wenn $\alpha$ und $\beta$ zwei verschiedene Elemente von $Y$ sind. So ergibt sich hieraus auf Grund von a), daß die Menge $Y$ nicht-stationär ist. Da $M$ stationär ist und

$$\bigcup_{\xi<\tau} H_{\nu_\xi} = M \qquad (\tau \leqq \omega_{cf(\Lambda)})$$

ist, existiert nach dem Hilfssatz ein $\xi_0 < \tau$, für das $H_{\nu_{\xi_0}}$ stationär ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 2. *Ist $\Lambda$ eine reguläre Limeszahl $> \omega$ und $M$ eine stationäre Teilmenge, so existiert für jede auf $M$ definierte regressive Funktion $\varphi$ eine stationäre Teilmenge von $M$ von Argumenten, für die die Werte von $\varphi$ einander gleich sind.*

Beweis. Sei $L_\alpha = \{\mu \in M : \varphi(\mu) = \alpha\}$. Nach Satz 1 existiert eine Zahl $\beta < \Lambda$ derart, daß die Menge $N$ der $\gamma \in M$, für die $\varphi(\gamma) \leqq \beta$ gilt, stationär ist. Offenbar ist

$$N = \bigcup_{\alpha \leqq \beta} L_\alpha .$$

Da $N$ stationär ist, existiert nach dem Hilfssatz eine Zahl $\alpha_0$ $(\alpha_0 \leqq \beta < \Lambda)$, für die $L_{\alpha_0}$ stationär ist.

## Literaturverzeichnis.

[1] P. S. Alexandroff—P. Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, *Verh. Akad. Wiss. Amsterdam*, (1) **45**, Nr. 1, 1—96.

[2] Ben Dushnik, A note on transfinite ordinals, *Bulletin Amer. Math. Soc.*, **37** (1931), 860—862.

[3] P. Erdös, Some remarks on set theory, *Proceedings Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 127—141.

[4] J. Novák, A paradoxical theorem, *Fundamenta Math.*, **37** (1950), 77—83.

[5] W. Neumer, Verallgemeinerung eines Satzes von Alexandroff und Urysohn, *Math. Zeitschrift*, **54** (1951), 254—261.

[6] H. Bachmann, *Transfinite Zahlen* (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 1, Berlin—Heidelberg—Göttingen, 1955), S. 43.

[7] G. Fodor, Generalization of a theorem of Alexandroff and Urysohn, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 204—206.

[8] G. Bloch, Sur les ensembles stationnaires de nombres ordinaux et les suites distinguées de fonctions regressives, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **236** (1953), 265—267.

*(Eingegangen am 24. September 1956.)*

# Mellinsche Transformation und Orthogonalität bei $\zeta(s,u)$; Verallgemeinerung der Riemannschen Funktionalgleichung von $\zeta(s)$.

Von MIKLÓS MIKOLÁS in Budapest.

**1.** Unter der Mellin-Transformierten einer Funktion $\Phi(u)$ versteht man bekanntlich

(1. 1) $$f(z)=\int_0^\infty u^{z-1}\Phi(u)\,du,$$

falls dieses (meistens auf die positive reelle Achse erstreckte) Integral existiert; da (1. 1) durch die Substitution $u=e^{-t}$ in die Formel

(1. 2) $$f(z)=\int_{-\infty}^\infty e^{-tz}F(t)\,dt$$

mit $F(t)=\Phi(e^{-t})$ übergeht, so kann die Mellinsche Transformation auch als eine sog. zweiseitige Laplace-Transformation aufgefaßt werden.[1])

HJ. MELLIN hat in mehreren Arbeiten gezeigt, daß eine Relation vom Typus (1. 1) unter allgemeinen Voraussetzungen eine andere von der Form

(1. 3) $$\Phi(u)=\frac{1}{2\pi i}\int u^{-z}f(z)\,dz$$

mit einer passend gewählten vertikalen Linie $z=\alpha+iy$ $(-\infty<y<\infty)$ als Integrationsweg zur Folge hat und umgekehrt.[2])

---

[1]) Läßt man $z$ nur auf einer Geraden $z=\alpha+iy$ ($\alpha$ fest) der komplexen Ebene variiren, so entsteht unter den Bezeichnungen $f(\alpha+iy)=g(y)$, $e^{-\alpha t}F(t)=G(t)$ die Formel: $g(y)=\int_{-\infty}^\infty e^{-ity}G(t)\,dt$. Die Fourier-Transformation ist also ein wichtiger Spezialfall von (1. 1) bzw. (1. 2). — Vgl. z. B. [1], [14].

[2]) Vgl. [8], [9], [10]; es sei für Anwendungen in der Funktionentheorie bzw. analytischen Zahlentheorie auf [1], [16] hingewiesen.

In der vorliegenden Arbeit will ich vor allem die Mellinsche Transformation auf die sogen. *Hurwitzsche Zetafunktion* $\zeta(s, u)$ $(0 < u \leqq 1)$ anwenden,[3]) was bis jetzt noch nicht geschehen zu sein erscheint.

Es zeigt sich, daß die Mellin-Transformierte

$$\mathfrak{M}(s, z) = \int_0^\infty u^{z-1} \bar{\zeta}(s, u)\, du\,^{4}) \quad \text{für} \quad \Re(s) < 1, \ \max\{0, \Re(s)\} < \Re(z) < 1$$

sich mit Hilfe der elementaren Funktionen, der Gammafunktion und von $\zeta(s)$ in geschlossener Form auswerten läßt (Satz 1). Die entspringende Relation

$$(1.4) \qquad \mathfrak{M}(1-s, z)\, \Gamma(z) = 2(2\pi)^{-(s+z)} \Gamma(s) \cos\frac{\pi}{2}(s-z)\, \zeta(s+z)$$

setzt in Evidenz die Symmetrie-Eigenschaft $\mathfrak{M}(1-s, z) = \mathfrak{M}(1-z, s)$; da (1. 4) im Fall $\Re(s) \geqq 1$ beim Grenzübergang $z \to 0$ in die Riemannsche Funktionalgleichung von $\zeta(s)$ übergeht, so handelt es sich zugleich um eine Verallgemeinerung derselben.

Die Umkehrung des Satzes 1 gestattet nicht die Benutzung der einschlägigen, in der Literatur auffindbaren allgemeinen Transformationssätzen,[5]) weil ihre Prämissen in unserem Fall nicht erfüllt sind. Es werden immerhin die im Mellinschen Sinn „reziproken" Darstellungen für $\zeta(s, u)$ bzw. $\zeta^*(s, u) = \zeta(s, u) - u^{-s}$ abgeleitet und zwar mittels der Methoden der Residuenrechnung, unter Heranziehung mancher, teilweise tieferer Eigenschaften und Abschätzungen von $\Gamma(z)$, $\zeta(s)$, $\zeta(s, u)$ (Satz 2). Die erhaltenen Beziehungen, wie

$$(1.5) \qquad \begin{gathered} \zeta^*(1-s, u) = \frac{1}{\pi i} \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} (2\pi u)^{-z}\, \Gamma(z) \cos\frac{\pi}{2}(s-z)\, \zeta(s+z)\, dz \\ (0 < u < 1\,;\ 0 < \Re(s) < 1\,;\ 0 < \alpha < \min\{\Re(s), 1-\Re(s)\}) \end{gathered}$$

decken einerseits neue Zusammenhänge zwischen $\zeta(s, u)$ und $\zeta(s)$ im kritischen Streifen auf; andererseits liegt es nahe, sie bei weiteren Untersuchungen über Wurzelverteilung von $\zeta(s)$ benützen zu können. (Vgl. (6. 1)—(6. 3).)

Wir beschäftigen uns auch mit der Frage, wann zwei verschiedene Werte von $\zeta(s, u)$ (als Funktionen von $u$) im Intervall $0 < u < 1$ zueinander *orthogonal* sind,[6]) welche — wie man sehen wird — mit der im Satz 1 betrachteten Mellin-Transformation in enger Verbindung steht. Der Antwort

---

[3]) Vgl. z. B. [16], [17].

[4]) Hier und durchwegs bezeichnet $\bar{\zeta}(s, u)$ die mit $\bar{\zeta}(s, u) = \zeta(s, u)$ $(0 < u \leqq 1)$ und $\bar{\zeta}(s, u+1) = \bar{\zeta}(s, u)$ $(u > 0)$ definierte Funktion.

[5]) Vgl. [1], S. 212, 409.

[6]) Orthogonalitätsrelationen sind in der Theorie der Zetafunktionen meines Wissens bisher nicht gefunden.

(Satz 3) enthält speziell die Orthogonalitätseigenschaften der Bernoullischen Polynome und einige Konsequenzen meiner, in anderem Zusammenhang unlängst gewonnenen Resultate.[7]) — Schließlich werden noch einige Sonderfälle hervorgehoben und Bemerkungen über die Verwendungsmöglichkeiten gemacht.

**2.** In den folgenden bedeuten $z = x + iy$, $s = \sigma + i\tau$ und $w$ dauernd *komplexe*, $t, u$ und $v$ aber *reelle* Variablen. Das Zeichen „log" ist für den (natürlichen) Hauptlogarithmus, $z^w$ für den Hauptwert der Potenz aufgehalten. $[\xi]$ soll den ganzen, $\overline{\xi} = \xi - [\xi]$ stets den gebrochenen Teil von $\xi$ bezeichnen. — Die auf reelle Wege bezüglichen Integrale sind im *Cauchy—Riemannschen Sinn* zu nehmen; unter dem Wert eines geradlinigen komplexen Integrals der Form $\int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} H(z)\,dz$ versteht man, wie üblich, den Grenzwert des Integrals von $\alpha - iY_1$ zu $\alpha + iY_2$ für $Y_1, Y_2 \to \infty$.[8])

Wir wollen zunächst $\zeta(s, u)$ als eine Funktion von $u$ untersuchen.

Lemma. *$\zeta(s, u)$ ist für ein beliebiges festes $s \neq 1$ eine im Intervall $0 < u \leqq 1$ stetige Funktion. Was die Nähe des Punktes $u = 0$ betrifft, so sind drei Fälle zu unterscheiden:* 1) *für $\sigma < 0$ gilt $\lim\limits_{u \to +0} \zeta(s, u) = \zeta(s)$;* 2) *ist $\sigma = 0$, so bleibt $\zeta(s, u)$ bei $u \to +0$ beschränkt;* 3) *für $\sigma > 0$, $s \neq 1$ hat man $\lim\limits_{u \to +0} u^s \zeta(s, u) = 1$.*

Beweis. Die Darstellung[9])

$$(2.\,1) \qquad \zeta(s, u) = \sum_{n=0}^{N} (u+n)^{-s} + \frac{1}{s-1}(u+N)^{1-s} - s\int\limits_{N}^{\infty} \overline{t}(u+t)^{-s-1}\,dt$$

$(\sigma > 0, s \neq 1$ ; $N = 0, 1, 2, \ldots)$ läßt sich mit $N = 1$ in der Form schreiben;

$$(2.\,2) \qquad \zeta(s, u) = u^{-s} + (u+1)^{-s} + \frac{1}{s-1}(u+1)^{1-s} - s\int\limits_{1}^{\infty} \overline{t}(t+u)^{-s-1}\,dt$$

$(\sigma > 0, s \neq 1)$, denn es ist

$$\int\limits_{0}^{1} \overline{t}(t+u)^{-s-1}\,dt = \frac{1}{1-s}\left\{(u+1)^{1-s} - u^{1-s}\right\} + \frac{u}{s}\left\{(u+1)^{-s} - u^{-s}\right\}.$$

[7]) Vgl. [11].

[8]) Wir beschränken uns also nicht nur auf den Cauchyschen Hauptwert $\lim\limits_{Y \to \infty} \int\limits_{\alpha - iY}^{\alpha + iY}$.

[9]) Vgl. [5], S. 9—10.

Eine partielle Integration ergibt ferner

$$-(s+1)\int_k^{k+1}\bar{t}(1-\bar{t})(t+u)^{-s-2}\,dt=\int_k^{k+1}\frac{d(t+u)^{-(s+1)}}{dt}(t-k)(1+k-t)\,dt=$$

$$=-\int_k^{k+1}(t+u)^{-s-1}(2k+1-t)\,dt= \tag{2.3}$$

$$=-\frac{1}{s}\Big\{(u+k)^{-s}-(u+k+1)^{-s}\Big\}+2\int_k^{k+1}\bar{t}(t+u)^{-s-1}dt \qquad (k=1,2,\ldots),$$

so daß man aus (2.2) die schärfere Formel

$$\zeta(s,u)=u^{-s}+\frac{1}{2}(u+1)^{-s}+\frac{1}{s-1}(u+1)^{1-s}+\frac{s(s+1)}{2}\int_1^{\infty}\bar{t}(1-\bar{t})(t+u)^{-s-2}\,dt \tag{2.4}$$

erhalten kann. Weil das Restglied wegen $|\bar{t}(1-\bar{t})(t+u)^{-s-2}|\leqq\frac{1}{4}t^{-\sigma-2}$ in jedem endlichen Gebiet der $s$-Ebene mit $\sigma>-1$ gleichmäßig existiert, ist die rechte Seite von (2.4) eine für $\sigma>-1, s\neq 1$ reguläre Funktion von $s$ und sie liefert die analytische Fortsetzung von $\zeta(s,u)$ bis zur Geraden $\sigma=-1$. (2.4) gilt somit für $\sigma>-1$, bis auf $s=1$.

Wir brauchen noch die folgende Formel von HURWITZ:[10])

$$\zeta(s,u)=\frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\left(\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2m\pi u}{m^{1-s}}+\cos\frac{\pi s}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2m\pi u}{m^{1-s}}\right). \tag{2.5}$$
$$(\sigma<0);$$

(2.5), (2.2) und (2.4) setzen die erste Behauptung über Stetigkeit von $\zeta(s,u)$ $(0<u\leqq 1)$ in Evidenz, wenn man beachtet, daß die Reihen $\sum m^{s-1}\cos 2m\pi u$, $\sum m^{s-1}\sin 2m\pi u$ und die Integrale in (2.2), (2.4) bezüglich $u$ gleichmäßig konvergieren, je nachdem der Fall $\sigma<0$, bzw. $\sigma>0$ oder $\sigma=0$ vorliegt. — Es bleibt der Endpunkt $u=0$ übrig.

1. Ist $s$ fest und $\sigma<0$, so läßt sich die rechte Seite von (2.5) durch die konvergente numerische Reihe

$$2|\Gamma(1-s)|(2\pi)^{\sigma-1}\left(\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|+\left|\cos\frac{\pi s}{2}\right|\right)\sum_{m=1}^{\infty}m^{\sigma-1}$$

majorieren, woher nach WEIERSTRASS die gleichmäßige Konvergenz der

---

10) Vgl. [6], S. 107; [17], S. 269.

betreffenden Funktionenreihe und die Stetigkeit ihrer Summe für $-\infty < u < \infty$ folgt. Man findet sogar gleich

(2. 6) $$\lim_{u\to+0} \zeta(s, u) = \lim_{u\to 1-0} \zeta(s, u) = \zeta(s, 1) = \zeta(s).$$

2. Für $s=0$ liefert (2. 4) unmittelbar

(2. 7) $$\lim_{u\to+0} \zeta(0, u) = \lim_{u\to+0}\left(\frac{1}{2}-u\right) = \frac{1}{2}.$$

Wenn aber $\sigma=0$, $s\neq 0$, d. h. $s=i\tau$ $(\tau\neq 0)$ ist, so gelangt man aus (2. 4) wegen

$$\left|\int_1^\infty \bar{t}(1-\bar{t})(t+u)^{-i\tau-2}\, dt\right| < \frac{1}{4}\int_1^\infty (t+u)^{-2}\, dt \leqq \frac{1}{4}$$

zur Abschätzung

(2. 8) $$|\zeta(i\tau, u)| < \frac{3}{2} + 2(\tau^2+1)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}|\tau|(\tau^2+1)^{\frac{1}{2}} \qquad (0 < u \leqq 1).$$

3. Schließlich, im Fall eines (festen) $s\neq 1$ mit $\sigma>0$ hat man nur die Ungleichungen

(2. 9) $$\left|\int_1^\infty \bar{t}(t+u)^{-s-1}\, dt\right| < \int_1^\infty (t+u)^{-\sigma-1}\, dt < \frac{1}{\sigma(u+1)^\sigma} < \frac{1}{\sigma} \quad (u \geqq 0)$$

zu berücksichtigen, um aus (2. 2) die Limesrelation

(2. 10) $$\lim_{u\to+0} u^s \zeta(s, u) = 1$$

zu entnehmen.

**3.** Es sei die Mellin-Transformierte

(3. 1) $$\mathfrak{M}(s, z) = \int_0^\infty u^{z-1}\bar{\zeta}(s, u)\, du$$

betrachtet. Wir behaupten den folgenden

Satz 1. *$\mathfrak{M}(s, z)$ ist für $\sigma < 1$, $\max\{0, \sigma\} < x < 1$ vorhanden, aber nicht absolut konvergent; in diesem Fall gilt die Darstellung*

(3. 2) $$\mathfrak{M}(s, z) = 2(2\pi)^{s-z-1}\,\Gamma(z)\,\Gamma(1-s)\sin\frac{\pi}{2}(s+z)\,\zeta(z-s+1),$$

*welche sich auch in der Form*

(3. 3) $$\mathfrak{M}(1-s, z)/\Gamma(z) = 2(2\pi)^{-(s+z)}\,\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\,\zeta(s+z)$$

$(\sigma>0,\ \max\{0, 1-\sigma\} < x < 1)$ *schreiben läßt.*

*Man hat die Limesgleichung*

(3. 4) $$\lim_{z\to 0} \mathfrak{M}(1-s, z)\, \Gamma(z) = \zeta(1-s) \qquad (\sigma \geqq 1)$$

*und die Symmetrie-Relation*

(3. 5) $$\mathfrak{M}(1-s, z) = \mathfrak{M}(1-z, s) \quad (0<\sigma<1, 0<x<1, \sigma+x<1);$$

*auf Grund von* (3. 2) *mag* (3. 3) *als eine Verallgemeinerung der Riemannschen Funktionalgleichung* $\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\cdot\zeta(s)$ $(s \neq 1, 0, -1, -2, \ldots)$ *angesehen werden.*

Beweis. 1° Zuerst setzen wir fest, daß (2. 5) nebst $0<u<1$ auch für $0 \leqq \sigma < 1$ gültig bleibt.

Denn die in (2. 5) vorkommenden trigonometrischen Reihen konvergieren für $s<1$, $0<u<1$ laut eines bekannten Konvergenzkriteriums von DIRICHLET [11]) und sogar gleichmäßig in jedem Teilintervall $0<\varepsilon \leqq u \leqq 1-\varepsilon$; faßt man sie als gewöhnliche Dirichletsche Reihen auf, so folgt ihre Konvergenz in der Halbebene $\sigma<1$, ferner die dortige Regularität ihrer Summen als Funktionen von $s$. Da alle singulären Stellen von $\Gamma(1-s)$ an $s=1, 2, 3, \ldots$ liegen, sind beide Seiten von (2. 5) analytisch für $\sigma<1$, so daß sie für die betreffenden Werte von $s$ identisch sein müssen.

Es gilt also für die nach 1 periodische Funktion $\bar{\zeta}(s, u) = \zeta(s, \bar{u})$ die Darstellung

(3. 6) $$\bar{\zeta}(s, u) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\left(\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{m=1}^{\infty} m^{s-1}\cos 2m\pi u + \right.$$
$$\left. + \cos\frac{\pi s}{2}\sum_{m=1}^{\infty} m^{s-1}\sin 2m\pi u\right) \qquad (\sigma<1;\, u>0,\, u \neq 1, 2, \ldots).$$

2° Es sei $\sigma<1$, $0<x<1$, und $x>\sigma$; wir betrachten das Integral $\int_0^A u^{x-1}\bar{\zeta}(s, u)\,du$ $(A>0$, beliebig).

Der Integrand ist auf Grund des vorangehenden Lemmas eine stetige Funktion von $u$ in $(0, \infty)$, abgesehen von den Punkten $u=1, 2, \ldots$, wobei nur die linksseitige Stetigkeit von $\bar{\zeta}(s, u)$ gesichert ist. Es kann ferner, den Fällen 1)—3) des Lemmas entsprechend, eine Zahl $\delta>0$ derart bestimmt werden, daß die Abschätzungen

(3. 7) $$|u^{x-1}\bar{\zeta}(s, u)| \leqq \begin{cases} Cu^{x-1} & (0<u\leqq\delta) \\ C & (\nu<u\leqq\nu+\delta;\ \nu=1, 2, \ldots) \end{cases} \qquad (\sigma \geqq 0)$$

[11]) Vgl. z. B. [2], S. 32, oder [13], S. 18.

bzw.

$$|u^{z-1}\,\overline{\zeta}(s,u)| \leqq \begin{cases} C\,u^{x-\sigma-1} & (0<u\leqq\delta) \\ C(u-\nu)^{-\sigma} & (\nu<u\leqq\nu+\delta;\ \nu=1,2,\ldots) \end{cases} \quad (0<\sigma<1) \tag{3.8}$$

gültig sind, wobei $C$ eine geeignete Konstante bezeichnet.

Hieraus ersieht man, daß unsere Bedingungen für $s$ und $z$ jedenfalls die (absolute) Integrabilität von $u^{z-1}\,\overline{\zeta}(s,u)$ in der Nähe der etwaigen Unendlichkeitsstellen und somit im ganzen Intervall $0\leqq u\leqq A$ nach sich ziehen. Multipliziert man nun (3. 6) mit $u^{z-1}$, so muß die rechte Seite (nach klassischen Sätzen der Theorie der trigonometrischen Reihen) die zu $0<u<1$ gehörige (gewöhnliche) Fourierentwicklung von $u^{z-1}\,\overline{\zeta}(s,u)$ sein, welche man bekanntlich gliedweise integrieren darf.[12]) Infolgedessen bekommen wir auf Grund bekannter Integralformeln in der Theorie der Gammafunktion[13])

$$\begin{aligned}\int_0^A u^{z-1}\,\overline{\zeta}(s,u)\,du &= 2(2\pi)^{s-1}\,\Gamma(1-s)\sum_{m=1}^{\infty} m^{s-1}\Big(\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^A u^{z-1}\cos 2m\pi u\,du+\\ &+\cos\frac{\pi s}{2}\int_0^A u^{z-1}\sin 2m\pi u\,du\Big) = 2(2\pi)^{s-z-1}\,\Gamma(1-s)\,\Gamma(z)\sin\frac{\pi}{2}(s+z)\sum_{m=1}^{\infty} m^{s-z-1}+\\ &+2(2\pi)^{s-1}\,\Gamma(1-s)\sum_{m=1}^{\infty} m^{s-1}\Big(\sin\frac{\pi s}{2}\int_A^{\infty} u^{z-1}\cos 2m\pi u\,du+\\ &+\cos\frac{\pi s}{2}\int_A^{\infty} u^{z-1}\sin 2m\pi u\,du\Big);\end{aligned} \tag{3.9}$$

die Konvergenz der ersten Reihe und von $\sum m^{s-z-1}=\zeta(z-s+1)$ impliziert offenbar die Existenz der letzten Summe.

3° Fassen wir die hier auftretenden Integrale ins Auge! Eine Teilintegration liefert $(x<1)$

$$\int_A^{\infty} u^{z-1}\cos 2m\pi u\,du=\frac{1}{2m\pi}\Big\{-A^{z-1}\sin 2m\pi A+(1-z)\int_A^{\infty} u^{z-2}\sin 2m\pi u\,du\Big\},$$

woher man sofort die Ungleichung

$$\left|\int_A^{\infty} u^{z-1}\cos 2m\pi u\,du\right|<\frac{1}{2m\pi}A^{x-1}+\frac{1}{m\pi}\int_A^{\infty} u^{x-2}\,du=\frac{A^{x-1}}{\pi m}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1-x}\right)$$

[12]) Vgl. z. B. [2], S. 89—91, bzw. S. 31.

[13]) Vgl. z. B. [7], S. 79; hierbei wird die Bezeichnung $z!=\Gamma(z+1)$ benutzt.

$(m=1,2,\ldots)$ erhält. Ähnlicherweise entsteht

$$\left|\int_A^\infty u^{z-1}\sin 2m\pi u\,du\right| < \frac{A^{x-1}}{\pi m}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1-x}\right) \qquad (m=1,2,\ldots).$$

Die Summe der zweiten Reihe in (3.9) bleibt also absolut unter der oberen Schranke $\frac{\zeta(2-\sigma)}{\pi}\left(\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|+\left|\cos\frac{\pi s}{2}\right|\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1-x}\right)A^{x-1}$; da der letzte Faktor für $A\to\infty$ gegen Null strebt, so erhält man für $A\to\infty$:

$$(3.10)\quad \sum_{m=1}^{\infty} m^{s-1}\left(\sin\frac{\pi s}{2}\int_A^\infty u^{z-1}\cos 2m\pi u\,du+\cos\frac{\pi s}{2}\int_A^\infty u^{z-1}\sin 2m\pi u\,du\right)\to 0,$$

wofern nur $s$ und $z$ fest und den oben gestellten Bedingungen unterworfen sind. (3.9) und (3.10) hat aber die Existenz von $\int_0^\infty u^{z-1}\bar{\zeta}(s,u)\,du$ und die Relation (3.2) zur Folge.

4° Um die Divergenz von $\int_0^\infty |u^{z-1}\bar{\zeta}(s,u)|\,du$ $(\sigma<1,\ \max\{0,\sigma\}<x<1)$ zu ermitteln, bemerken wir, daß die Integrale

$$\int_\nu^{\nu+1} |\bar{\zeta}(s,u)|\,du = \int_0^1 |\zeta(s,u)|\,du \qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

auf Grund des Lemmas vorhanden und positiv sind, ferner, daß $u^{x-1}$ in unserem Fall für $0<u<\infty$ streng monoton abnimmt.

Daher ist für $N=1,2,\ldots$

$$\int_0^N u^{x-1}|\bar{\zeta}(s,u)|\,du > N^{x-1}\int_0^N |\bar{\zeta}(s,u)|\,du = N^x\int_0^1 |\zeta(s,u)|\,du$$

und das letzte Produkt wächst mit $N$ über alle Grenzen.

5° Schreibt man $1-s$ statt $s$, so wandelt sich (3.2) in

$$(3.11)\qquad \mathfrak{M}(1-s,z)=2(2\pi)^{-(s+z)}\Gamma(s)\,\Gamma(z)\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\,\zeta(s+z)$$

$$(\sigma>0,\ \max\{0,1-\sigma\}<x<1)$$

um; daraus geht einerseits die Symmetrie-Relation (3.5), andererseits im Fall $\sigma\geqq 1,\ 0<x<1$ die Formel (3.4) unmittelbar hervor.

**4.** Unser nächstes Ziel ist die Mellinsche Umkehrung von (3.3) mit funktionentheoretischen Mitteln. Dies leistet

Satz 2. *$\zeta(s,u)$ ist nebst $\sigma<1$ und $0<u<1$ mittels der Gammafunktion und der Riemannschen Zetafunktion folgendermaßen ausdrückbar:*

$$\zeta(1-s,u)=\frac{1}{\pi i}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}(2\pi u)^{-z}\Gamma(z)\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\zeta(s+z)dz \tag{4.1}$$
$$\left(\sigma>\frac{1}{2},\ s\neq 1,2,\ldots;\ \max\{0,1-\sigma\}<\alpha<\frac{1}{2}\right),$$

*ferner*

$$\zeta(1-s,u)=u^{s-1}+\frac{1}{\pi i}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}(2\pi u)^{-z}\Gamma(z)\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\zeta(s+z)dz \tag{4.2}$$
$$(0<\sigma<1;\ 0<\alpha<\min\{\sigma,1-\sigma\}).$$

Beweis. Es sei stets $0<u<1$, $\alpha>0$, $\alpha\neq 1-\sigma$ angenommen; wir beschränken uns überall auf die *nicht-ganzen* Werte von $s$, falls nicht eine andere Festsetzung getroffen wird.

1° Der Integrand ist ersichtlich für alle Werte von $s$ und $z$ regulär, abgesehen von den durch die meromorphen Funktionen $\Gamma(z)$ und $\zeta(s+z)$ gelieferten singulären Stellen. Wir betrachten nebst festen $s$ und $u$ die Summe der Residuen von $u^{-z}\mathfrak{F}(s,z)=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cdot(2\pi u)^{-z}\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\Gamma(z)\zeta(s+z)$, erstreckt über die von $x=\alpha$ links liegenden Pole und benutzen für diese Summe die Cauchysche Bezeichnung:[14])

$$\mathop{\mathcal{E}}_{x<\alpha} u^{-z}\mathfrak{F}(s,z)=\mathop{\mathcal{E}}_{x<\alpha} 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)(2\pi u)^{-z}\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\left[\Gamma(z)\zeta(s+z)\right].$$

Mit Rücksicht auf die Einfachheit der fraglichen Pole erhält man

$$\operatorname*{res}_{z=-k} u^{-z}\mathfrak{F}(s,z)=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)(2\pi u)^{k}\cos\frac{\pi}{2}(s+k)\zeta(s-k)\frac{(-1)^k}{k!}= \tag{4.3}$$
$$=\Gamma(s)\frac{\zeta(1-s+k)}{k!\,\Gamma(s-k)}u^k=\frac{(s-1)(s-2)\cdots(s-k)}{k!}\zeta(1-s+k)u^k$$
$$(k=0,1,2,\ldots),$$

gleichwie

$$\operatorname*{res}_{z=1-s} u^{-z}\mathfrak{F}(s,z)=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)(2\pi u)^{s-1}\cos\frac{\pi}{2}(2s-1)\Gamma(1-s)= \tag{4.4}$$
$$=\frac{1}{\pi}u^{s-1}\Gamma(s)\Gamma(1-s)\sin\pi s=u^{s-1}.$$

---

[14]) $\mathcal{E}_l\,\varphi(z)[\psi(z)]$ bezeichnet bekanntlich allgemein die Residuensumme von $\varphi(z)\cdot\psi(z)$, bezüglich auf die innerhalb der geschlossenen Kurve $l$ gelegenen singulären Stellen von $\psi(z)$. — Vgl. z. B. [6], S. 15, 30; [12], S. 84.

Die Untersuchung der somit auftretenden Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(s-1)(s-2)\cdots(s-k)}{k!}\zeta(1-s+k)u^k$$

erfordert keine Mühe. Denn man gewinnt zunächst für $\sigma>1$, durch Verwendung der Binomialreihe und des Doppelreihensatzes von WEIERSTRASS[15])

$$(4.5)\qquad \begin{aligned}\zeta(s,u)-u^{-s}&=\sum_{m=1}^{\infty}m^{-s}\left(1+\frac{u}{m}\right)^{-s}=\\ &=\sum_{m=1}^{\infty}m^{-s}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-s}{k}\left(\frac{u}{m}\right)^k=\zeta(s)+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{-s}{k}\zeta(s+k)u^k.\end{aligned}$$

Die letzte Reihe konvergiert für jedes feste $u$ in einem beliebigen endlichen Bereich $\mathfrak{B}$ der $s$-Ebene gleichmäßig, wie man auf Grund der für hinreichend große $k$ gültigen Abschätzung $\left|\binom{-s}{k}\zeta(s+k)u^k\right|\sim\left|\frac{k^{s-1}}{\Gamma(s)}\right|u^k<2\max_{(\mathfrak{B})}\left|\frac{1}{\Gamma(s)}\right|u^k$ und des Weierstraßschen Kriteriums sofort einsieht; daraus folgt aber, daß die betreffende Summe eine ganze Funktion von $s$ ist. Da (4. 5) infolgedessen beiderseits bis auf $s=1$ analytische Funktionen erhält, so muß es allgemein

$$(4.6)\qquad \zeta(s,u)-u^{-s}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-s}{k}\zeta(s+k)u^k\qquad(s\neq1)$$

bestehen.[16])

Unter Beachtung von (4. 3), (4. 4), (4. 6) ergibt sich

$$(4.7)\qquad \underset{z=\alpha}{\mathfrak{L}}\,u^{-z}\mathfrak{F}(s,z)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{s-1}{k}\zeta(1-s+k)u^k=\zeta(1-s,u)-u^{s-1}, & \text{wenn } \alpha<1-\sigma \text{ ist,}\\ \zeta(1-s,u) \text{ im Fall } \alpha>1-\sigma.\end{cases}$$

2° Wir betrachten nun ein Viereck in der $z$-Ebene mit den Eckpunkten $\alpha-iY_1$, $\alpha+iY_2$, $-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iY_2$, $-\left(N+\frac{1}{2}\right)-iY_1$ ($Y_1>0$, $Y_2>0$, $N$ eine positive ganze Zahl), umlaufen in positivem Sinn. Vermöge des Residuensatzes kann man schreiben (vgl. (4. 3), (4. 4))

$$(4.8)\qquad \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\alpha-iY_1}^{\alpha+iY_2}+\int_{\alpha+iY_2}^{-(N+\frac12)+iY_2}+\int_{-(N+\frac12)+iY_2}^{-(N+\frac12)-iY_1}+\int_{-(N+\frac12)-iY_1}^{\alpha-iY_1}\right)u^{-z}\mathfrak{M}(1-s,z)dz=$$

---

15) S. z. B. [3], S. 440 und 444—445.

16) Es ist hierbei, wie üblich, unter $[(s+k-1)\zeta(s+k)]_{s=1-k}$ der entsprechende Grenzwert (d. h. 1) zu verstehen.

$$(4.8)\qquad = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N} \binom{s-1}{k} \zeta(1-s+k)u^k, & \text{falls } \alpha < 1-\sigma \text{ ist,} \\ u^{s-1} + \sum_{k=0}^{N} \binom{s-1}{k} \zeta(1-s+k)u^k, & \text{wenn } \alpha > 1-\sigma \text{ ist und} \end{cases}$$

$Y_1, Y_2, N$ genügend groß gewählt werden.[17]

Hierbei ist der Integrand (der Kürze halber) nur einmal dargestellt und jeder Integrationsweg (wie in den folgenden stets) geradlinig gemeint.

Unsere Aufgabe steht offenbar darin, die einzelnen Teilintegrale für feste $s$ und $u$ hinreichend scharf abzuschätzen und dann $Y_1 \to \infty$, $Y_2 \to \infty$, $N \to \infty$ streben zu lassen.

3° Wir beginnen mit dem dritten Glied unter (4.8); es ist

$$(4.9)\qquad \int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)-iY_1}^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iY_2} u^{-z}\,\mathfrak{F}(s, z)\,dz = i\int_{-Y_1}^{Y_2} u^{N+\frac{1}{2}-iy}\,\mathfrak{F}\left(s, -N-\frac{1}{2}+iy\right)dy.$$

Man verifiziert leicht mittels der Funktionalgleichung von $\zeta(s)$:

$$(4.10)\qquad \mathfrak{F}(s, z) = \frac{1}{2\pi}\Gamma(s)\Gamma(z)\Gamma(1-s-z)(\sin\pi z + \sin\pi s)\zeta(1-s-z),$$

und als ein Korollarium der Stirlingschen Formel:

$$(4.11)\qquad \Gamma(z_0+n+1) \sim n!\, n^{z_0} \qquad (z_0 \text{ fest, } n \to \infty).$$

Da man die Wertbestimmung

$$(4.12)\qquad \Gamma\left(-N-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-2)^{N+1}\pi^{\frac{1}{2}}}{1\cdot 3\cdots(2N+1)}$$

hat, so gilt von einer Zahl $N = N_0$ an

$$(4.13)\qquad \begin{aligned} &\left|\Gamma\left(-N-\frac{1}{2}+iy\right)\right|\left|\Gamma\left(1-s+N+\frac{1}{2}-iy\right)\right| \leqq \\ &\leqq \left|\Gamma\left(-N-\frac{1}{2}\right)\right|\left|\Gamma\left(1-\sigma+N+\frac{1}{2}\right)\right| < \\ &< 2(N!)^{-1}\pi^{\frac{1}{2}}\cdot 2N!\,N^{\frac{1}{2}-\sigma} = 4\pi^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}-\sigma} \qquad (-Y_1 \leqq y \leqq Y_2); \end{aligned}$$

besteht zugleich $N > \sigma$, so ist gewiß

$$(4.14)\qquad \left|\zeta\left(1-s+N+\frac{1}{2}-iy\right)\right| \leqq \zeta\left(N+\frac{3}{2}-\sigma\right) < \zeta\left(\frac{3}{2}\right).$$

[17]) D. h. so groß, daß $1-s$ innerhalb unseres Vierecks liegt. Das ist etwa bei $Y_1 > |\tau|$, $Y_2 > |\tau|$, $N > \sigma$ gewiß der Fall.

Es folgt noch unmittelbar

$$(4.15)\quad \left|\sin\pi\left(-N-\frac{1}{2}+iy\right)\right|=\left|-\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi\cdot\operatorname{ch}\pi y+\right.$$
$$\left.+i\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi\cdot\operatorname{sh}\pi y\right|\leqq\operatorname{ch}\pi y+|\operatorname{sh}\pi y|\leqq e^{\pi|y|}\qquad(-Y_1\leqq y\leqq Y_2).$$

Alles dies ermöglicht die Abschätzung

$$(4.16)\quad \left|\int\limits_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)-iY_1}^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iY_2} u^{-z}\mathfrak{F}(s,z)\,dz\right|<$$
$$<2\pi^{-\frac{1}{2}}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)|\Gamma(s)|u^{N+\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}-\sigma}\int\limits_{-Y_1}^{Y_2}(e^{\pi|y|}+|\sin\pi s|)\,dy\qquad(N>\max\{N_0,\sigma\}).$$

Bei *fest gehaltenen* $Y_1$ und $Y_2$ wird die letzte Schranke für $N\to\infty$ beliebig klein, weil dann $u^{N+\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}-\sigma}$ gegen Null strebt.

4° Von nun an bezeichnen wir (zur Abkürzung) mit $c_1, c_2, \ldots; K_1, K_2, \ldots$ positive Konstanten, welche unter Umständen von $s$ und $u$ abhängen können, aber von $Y$ und $N$ jedenfalls *unabhängig* sind.

Es ist zweckmäßig, das Integral

$$(4.17)\quad \int\limits_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iY}^{\alpha+iY} u^{-z}\mathfrak{F}(s,z)\,dz=\int\limits_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)}^{\alpha} u^{-x-iY}\mathfrak{F}(s,x+iY)\,dx$$

$\left(Y\neq 0\text{ beliebig reell, } N\geqq\sigma+\frac{1}{2}\right)$, welche vom Typus des zweiten und vierten Gliedes unter (4. 8) ist, folgenderweise zu zerlegen: $\int\limits_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)}^{-(\sigma+1)}+\int\limits_{-(\sigma+1)}^{-\sigma}+\int\limits_{-\sigma}^{\alpha}$.

Erstens schreiben wir (vgl. (4. 10))

$$\int\limits_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)}^{-(\sigma+1)} u^{-x-iY}\mathfrak{F}(s,x+iY)\,dx=$$
$$(4.18)\quad =\frac{1}{2}\Gamma(s)\int\limits_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)}^{-(\sigma+1)}\left[u^{-z}\frac{\Gamma(1-s-z)}{\Gamma(1-z)}\left(1+\frac{\sin\pi s}{\sin\pi z}\right)\zeta(1-s-z)\right]_{z=x+iY}dx.$$

Hierbei gilt wegen[18]) $\Gamma(w+w_0) \sim \Gamma(w) w^{w_0}$ ($w_0$ beliebig fest, $|w| \to \infty$)

$$\left|\frac{\Gamma(1-s-z)}{\Gamma(1-z)}\right|_{z=x+iY} \sim |(1-x-iY)^{-s}| \qquad (Y \text{ fest, } x \to -\infty),$$

also nebst $\sigma > 0$ gewiß

$$\left|\frac{\Gamma(1-s-z)}{\Gamma(1-z)}\right|_{z=x+iY} < c_1 |1-x-iY|^{-\sigma} < c_1 |Y|^{-\sigma} \quad (-\infty < x \leqq -\sigma-1). \tag{4.19}$$

Da allgemein $|\sin(\xi+i\eta)|^2 = \sin^2\xi + \operatorname{sh}^2\eta$ ($\xi, \eta$ beliebig reell), also $\operatorname{sh}^2\eta \leqq |\sin(\xi+i\eta)|^2 \leqq 1+\operatorname{sh}^2\eta = \operatorname{ch}^2\eta$ besteht, gelangt man zur Abschätzung

$$\left|1+\frac{\sin \pi s}{\sin \pi z}\right|_{z=x+iY} \leqq 1+\frac{|\sin \pi(\sigma+i\tau)|}{|\sin \pi(x+iY)|} \leqq 1+\frac{\operatorname{ch} \pi\tau}{|\operatorname{sh} \pi Y|} \tag{4.20}$$
$$(-\infty < x < \infty).$$

Ferner, hinsichtlich $1-\sigma-x \geqq 2$

$$|\zeta(1-s-z)|_{z=x+iY} \leqq \zeta(2) < 2 \qquad (-\infty < x \leqq -\sigma-1), \tag{4.21}$$

so daß (4.18), (4.19), (4.20), (4.21) die Ungleichungen

$$\left|\int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)}^{-(\sigma+1)} u^{-x-iY} \mathfrak{F}(s, x+iY)\, dx\right| < \tag{4.22}$$
$$< c_2 |Y|^{-\sigma}\left(1+\frac{\operatorname{ch} \pi\tau}{|\operatorname{sh} \pi Y|}\right) \int_{-\infty}^{-(\sigma+1)} u^{-x} dx < c_3 |Y|^{-\sigma} \qquad (|Y| > K_1;\ N = 1, 2, \ldots)$$

liefern.

Bei dem zweiten und dritten Teilintegral in Betracht untersuchen wir den Integrand in der Form

$$u^{-x-iY} \mathfrak{F}(s, x+iY) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \left[(2\pi u)^{-z} \cos \frac{\pi}{2}(s-z) \Gamma(z) \zeta(s+z)\right]_{z=x+iY}.$$

Man hat

$$\left|\cos \frac{\pi}{2}(\sigma-x+i(\tau-Y))\right| \leqq \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}(\tau-Y) + \left|\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}(\tau-Y)\right| \leqq e^{\frac{\pi}{2}(|\tau|+|Y|)} \tag{4.23}$$
$$(-\infty < x < \infty)$$

und, vermöge der Formel von PINCHERLE—MELLIN[19])

$$|\Gamma(x+iy)| < (\sqrt{2\pi}+\delta) |Y|^{x-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|Y|} \tag{4.24}$$
$$(\delta > 0 \text{ fest, } -\sigma-1 \leqq x \leqq a,\ |Y| > K_2 > 0).$$

---

[18]) Vgl. [7], S. 30—31.

[19]) Vgl. [10]. S. 308—309, oder [7], S. 14—15.

Kombinieren wir die für festes $\sigma$ und $|\tau|\to\infty$ bestehenden Abschätzungen $|\zeta(s)|=O(1)\cdot|\tau|^{\frac{1}{2}-\sigma}|\zeta(1-s)|$ ($\sigma$ beliebig), $\zeta(s)=O(|\tau|^{\frac{1}{2}(1-\sigma)}\log|\tau|)$ ($0\leqq\sigma\leqq 1$), von welchen die erste in einem beliebigen Streifen $\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2$, die zweite in jedem solchen mit $0\leqq\sigma_1<\sigma_2\leqq 1$ auch *gleichmäßig* gilt; somit ergibt sich unter Benutzung des Satzes von LINDELÖF:[20])

$$(4.25)\qquad |\zeta(s+z)|<\begin{cases} c_4|Y|^{\frac{1}{2}-(\sigma+x)}\log|Y| \text{ mit } -\sigma-1\leqq x\leqq-\sigma,\ |Y|>K_3, \\ c_5|Y|^{\frac{1}{2}(1-\sigma-x)}\log|Y| \text{ nebst } -\sigma\leqq x\leqq 1-\sigma,\ |Y|>K_4, \\ c_6\log|Y| \text{ für } 1-\sigma\leqq x\leqq 1+\delta,\ \delta>0 \text{ fest},\ |Y|>K_5. \end{cases}$$

Es folgt also

$$(4.26)\qquad \left|\int_{-(\sigma+1)}^{-\sigma} u^{-x-iY}\mathfrak{F}(s,x+iY)\,dx\right|<c_7|Y|^{-\sigma}\log|Y| \qquad (|Y|>K_5).$$

Was den Fall des Intervalls $(-\sigma,\alpha)$ betrifft, so sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden. Wenn dies einen Teil von $(-\sigma,1-\sigma)$ bildet, d. h. $\alpha<1-\sigma$ besteht, so erhält man (vgl. (4.23)—(4.25))

$$(4.27)\qquad \begin{aligned} \left|\int_{-\sigma}^{\alpha} u^{-x-iY}\mathfrak{F}(s,x+iY)\,dx\right| &< c_8\int_{-\sigma}^{\alpha}(2\pi u)^{-x}|Y|^{\frac{1}{2}(x-\sigma)}\log|Y|\,dx= \\ &=c_9(|Y|^{\frac{1}{2}(\alpha-\sigma)}-|Y|^{-\sigma}) \qquad (|Y|>K_6). \end{aligned}$$

Widrigenfalls ($\alpha>1-\sigma$) hat man in (4.27) $1-\sigma$ statt $\alpha$ zu setzen und es entsteht für den Rest (vgl. (4.23)—(4.25))

$$(4.28)\qquad \begin{aligned} \left|\int_{1-\sigma}^{\alpha} u^{-x-iY}\mathfrak{F}(s,x+iY)\,dx\right| &< c_{10}\int_{1-\sigma}^{\alpha}|Y|^{x-\frac{1}{2}}\log|Y|\,dx= \\ &=c_{10}(|Y|^{\alpha-\frac{1}{2}}-|Y|^{\frac{1}{2}-\sigma}) \qquad (|Y|<K_7) \end{aligned}$$

(4.17), (4.22), (4.26), (4.28) ergeben zusammen

$$(4.29)\qquad \left|\int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iY}^{\alpha+iY} u^{-z}\mathfrak{F}(s,z)\,dz\right|<\begin{cases} c_{11}|Y|^{-\sigma}\log|Y|+c_9|Y|^{\frac{1}{2}(\alpha-\sigma)} & (|Y|>K_8), \\ c_{11}|Y|^{-\sigma}\log|Y|+c_{12}|Y|^{\frac{1}{2}}+c_{10}|Y|^{\alpha-\frac{1}{2}} & (|Y|>K_9), \end{cases}$$

je nachdem $\sigma>0$ und $0<\alpha<1-\sigma$ bzw. $\sigma>0$ und $\alpha>0$, $\alpha>1-\sigma$ ist.

---

[20]) Vgl. z. B. [15], S. 19—20.

Nimmt man noch im ersten Fall $\alpha < \sigma$, im zweiten aber $\sigma > \frac{1}{2}$ und $\alpha < \frac{1}{2}$ an, wodurch die Bedingungen (I) $0 < \sigma < 1$, $0 < \alpha < \min\{\sigma, 1-\sigma\}$ bzw. (II) $\sigma > \frac{1}{2}$, $s \neq 1, 2, \ldots$, $\max\{0, 1-\sigma\} < \alpha < \frac{1}{2}$ entspringen, so muß nach (4.29) das Integral linker Hand für $|Y| \to \infty$ gegen Null streben, und zwar *inbezug auf N gleichmäßig.*

5° Es seien $u$ mit $0 < u < 1$ und $s$, $\alpha$ mit (I) oder (II) festgelegt.

Da wir in 1° die Konvergenz und Summe von $\underset{x<\alpha}{\mathfrak{S}} u^{-z} \mathfrak{F}(s, z)$ schon ermittelt haben (vgl. (4.7)), schreiben wir nun (4.8) in der Form

$$\underset{x<\alpha}{\mathfrak{S}} u^{-z} \mathfrak{F}(s, z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - iY_1}^{\alpha + iY_2} u^{-z} \mathfrak{F}(s, z)\, dz = \sum_{k=N+1}^{\infty} \binom{s-1}{k} \zeta(1-s+k) u^k +$$

$$(4.30) \qquad + \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\alpha + iY_2}^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iY_2} + \int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iY_2}^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)-iY_1} + \int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)-iY_1}^{\alpha - iY_1} \right) u^{-z} \mathfrak{F}(s, z)\, dz,$$

wobei $Y_1$, $Y_2$ und $N$ hinreichend groß zu denken sind (vgl.[17])), ferner $\underset{x<\alpha}{\mathfrak{S}}$ nach (4.7) für (I) $\zeta(1-s, u) - u^{s-1}$, für II einfach $\zeta(1-s, u)$ bedeutet. Wir wollen in den folgenden Zeilen auf die Bezeichnung des Integranden $u^{-z} \mathfrak{F}(s, z)$ verzichten.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgeschrieben.

Vermöge (4.29) lassen sich die Parameter $Y_1$ und $Y_2$ derart bestimmen, daß die Ungleichungen

$$(4.31) \qquad \left| \int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iY_2}^{\alpha + iY_2} \right| \text{ und } \left| \int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)-iY_1}^{\alpha - iY_1} \right| < \frac{\pi}{2} \varepsilon \qquad (Y_1, Y_2 > K_0, N = 1, 2, \ldots)$$

gültig sind.

Halten wir ein solches Wertepaar $Y_1, Y_2$ fest so kann $N$ (vgl. (4.6), (4.16)) gewiß so groß gewählt werden, daß

$$(4.32) \qquad \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \binom{s-1}{k} \zeta(1-s+k) u^k \right| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (N > N_1),$$

ferner

$$(4.33)\qquad \left|\int\limits_{-(N+\frac{1}{2})-iY_1}^{-(N+\frac{1}{2})+iY_2}\right| < \frac{\pi}{2}\varepsilon \qquad (N>N_1)$$

ausfällt.

(4.30)—(4.33) implizieren aber

$$(4.34)\qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-iY_1}^{a+iY_2} - \sum_{x<a}\right| < \frac{\varepsilon}{4}+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}+\frac{\pi\varepsilon}{2}+\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon \qquad (Y_1, Y_2>K_{10}),$$

also die Konvergenz von $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}$ und (4.1) bzw. (4.2), w. z. b. w.

5. Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{M}(s,z)$ in solcher Form geschrieben werden kann, welche gewisse Vorteile gegenüber ihrem ursprünglichen Ausdruck bietet, ferner uns zu Orthogonalitätseigenschaften von $\zeta(s,u)$ $(0<u\leqq 1)$ führt. Genauer:

Satz 3. *Es besteht*

$$(5.1)\qquad \int\limits_0^1 \zeta(s,u)\,du=0 \qquad (\sigma>1),$$

*und das linksseitige Integral ist für* $\sigma\leqq 0$ *eigentlich, für* $0<\sigma<1$ *uneigentlich, aber absolut konvergent.*

*Für* $\max\{0,\sigma\}+\max\{0,x\}<1$ (*) *ist ein Produkt* $\zeta(s,u)\zeta(z,u)$ *im Intervall* $0<u<1$ *absolut integrierbar*[21]) *und es gilt die Formel:*

$$(5.2)\qquad \int\limits_0^1 \zeta(s,u)\,\zeta(z,u)\,du=(2\pi)^{s+z-2}\,\Gamma(1-s)\,\Gamma(1-z)\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\,\zeta(2-s-z);$$

*insbesondere*

$$(5.3)\qquad \int\limits_0^1 \zeta(s,u)\,\zeta(z,u)\,du=\begin{cases}\mathfrak{M}(s,1-z), & \textit{wenn } x>0,\ x+\max\{0,\sigma\}<1,\\ \mathfrak{M}(z,1-s), & \textit{wenn } \sigma>0,\ \sigma+\max\{0,x\}<1,\end{cases}$$

---

[21]) Es erscheint wahrscheinlich, daß $\int\limits_0^1 \zeta(s,u)\,\zeta(z,u)\,du$ im Fall $\max\{0,\sigma\}+\max\{0,x\}\geqq 1$ als ein Riemann—Cauchysches Integral nicht existiert, so daß es dann auch von Orthogonalitätsrelationen der Art (5.5) keine Rede sein kann.

*ferner*

(5.4)
$$\|\zeta(s,u)\|^2 = \int_0^1 |\zeta(s,u)|^2 du = 2(2\pi)^{2(\sigma-1)} \operatorname{ch} \pi\tau \cdot |\Gamma(1-s)|^2 \zeta(2-2\sigma) \quad \left(\sigma < \frac{1}{2}\right).$$

*Nebst* (*) *hat man dann und nur dann die Orthogonalitätsrelation*

(5.5)
$$(\zeta(s,u), \zeta(z,u)) = \int_0^1 \zeta(s,u)\zeta(\bar{z},u)\,du = 0,$$

*wenn $s$ und $\bar{z}$ sich um eine ungerade (ganze) Zahl unterscheiden.*

Beweis. 1° Nach dem Lemma ist $|\zeta(s,u)|$ für $\sigma \leqq 0$ im Intervall $0 \leqq u \leqq 1$ beschränkt und integrierbar, während wir für $0 < \sigma < 1$ die Abschätzung $|\zeta(s,u)| < Cu^{-\sigma}$ $(C > 0, 0 < u \leqq 1)$ haben; wegen der absoluten Integrierbarkeit von $\zeta(s,u)$ liefert (3.6) die gewöhnliche Fourierentwicklung dieser Funktion in $0 < u < 1$, woher (5.1) durch eine (jedenfalls erlaubte) gliedweise Integration unmittelbar folgt.

2° Es sei $\max\{0, \sigma\} + \max\{0, x\} < 1$ angenommen; dann sind vier Fälle möglich: 1) $\sigma \leqq 0$, $x \leqq 0$; 2) $\sigma \leqq 0$, $0 < x < 1$; 3) $x \leqq 0$, $0 < \sigma < 1$; 4) $x > 0$, $\sigma > 0$, $x + \sigma < 1$. Wie aus dem Lemma erhellt, ist $|\zeta(s,u)|\,|\zeta(z,u)|$ in $0 < u \leqq 1$ allerdings eine stetige Funktion von $u$; bei $u \to +0$ bleibt sie im Fall 1) beschränkt, sonst mag sie unendlich werden und zwar, der Reihe nach, höchstens wie $u^{-x}, u^{-\sigma}, u^{-(\sigma+x)}$. Wegen $\sigma + x < 1$ ist also die Existenz von $\int_0^1 |\zeta(s,u)|\,|\zeta(z,u)|\,du$ gesichert.

Liegt 1) vor, so sind auch $|\zeta(s,u)|^2$ und $|\zeta(z,u)|^2$ in $0 < u \leqq 1$ integrierbar und es kann die Parsevalsche Formel für nach 1 periodische Funktionen angewendet werden.[22]) Man erhält durch (3.6)

(5.6)
$$\int_0^1 \zeta(s,u)\,\zeta(z,u)\,du =$$
$$= 2\Gamma(1-s)\Gamma(1-z)(2\pi)^{s+z-2} \sum_{m=1}^{\infty} m^{s+z-2}\left(\sin\frac{\pi s}{2}\sin\frac{\pi z}{2} + \cos\frac{\pi s}{2}\cos\frac{\pi z}{2}\right) =$$
$$= 2(2\pi)^{s+z-2}\Gamma(1-s)\Gamma(1-z)\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\zeta(2-s-z),$$

also (5.2).

Wir betrachten nun 2) und 4) zusammen, indem wir die Gültigkeit der Bedingungen $x > 0$, $x + \max\{0, \sigma\} < 1$ voraussetzen. Dann ist die Mellin-

[22]) Es wäre in sonstigen Fällen die Benützung des Theorems von Parseval—Hurwitz mit überflüssigen Einschränkungen verbunden.

Transformierte $\mathfrak{M}(s, 1-z) = \int\limits_0^\infty u^{-z} \overline{\zeta}(s, u)\, du$ nach Satz 1 gewiß vorhanden; die Verwendung von (2. 1) ergibt

$$\int\limits_0^1 \zeta(s, u)\, \zeta(z, u) du + \int\limits_0^1 \zeta(s, u) \left\{ z \int\limits_N^\infty \overline{t}(t+u)^{-z-1} dt + \frac{1}{1-z}(u+N)^{1-z} \right\} du =$$

$$(5.7) \qquad = \int\limits_0^1 \zeta(s, u) \left( \sum_{n=0}^{N} (u+n)^{-z} \right) du = \sum_{n=0}^{N} \int\limits_n^{n+1} \zeta(s, u-n) u^{-z} du =$$

$$= \int\limits_0^{N+1} u^{-z} \zeta(s, \overline{u})\, du \qquad (N = 0, 1, 2, \ldots).$$

Da unsere Einschränkungen für $s$ und $z$ die Ungleichung $\sigma < 1$ implizieren, so existiert die Stammfunktion

$$Z(s, u) = \int\limits_0^u \zeta(s, v) dv \qquad (0 \leqq u \leqq 1)$$

und stellt eine stetige Funktion von $u$ mit

$$(5.8) \qquad Z(s, 0) = Z(s, 1) = 0$$

dar (vgl. (5. 1)); auf Grund von (5. 8) entspringt durch Teilintegration

$$(5.9) \qquad \begin{aligned} &\int\limits_0^1 \zeta(s, u) \left\{ z \int\limits_N^\infty \overline{t}(t+u)^{-(z+1)} dt + \frac{(u+N)^{1-z}}{1-z} \right\} du = \\ &= \int\limits_0^1 Z(s, u) \left\{ z(z+1) \int\limits_N^\infty \overline{t}(u+t)^{-z-2} dt - (u+N)^{-z} \right\} du. \end{aligned}$$

Daß man dabei unter dem Integralzeichen nach $u$ differenzieren durfte, weist man wegen $\left| \int\limits_n^{n+1} \overline{t}(u+t)^{-z-2} dt \right| \leqq \int\limits_n^{n+1} t^{-x-1} dt = \frac{1}{x} \{ n^{-x} - (n+1)^{-x} \}$ $(0 \leqq u \leqq 1;\, n = 1, 2, \ldots)$ leicht nach.

Aus (5. 7) und (5. 9) entnimmt man die Abschätzung

$$\left| \int\limits_0^1 \zeta(s, u)\, \zeta(z, u) du - \mathfrak{M}(s, 1-z) \right| \leqq \left| \int\limits_{N+1}^\infty u^{-z} \zeta(s, \overline{u})\, du \right| +$$

$$+ N^{-x} \left( \frac{|z|\, |z+1|}{x+1} + \int\limits_0^1 |Z(s, u)| du \right) \qquad (N = 1, 2, \ldots);$$

läßt man $N \to \infty$ streben, so folgt

$$\int_0^1 \zeta(s, u)\,\bar{\zeta}(z, u)\,du = \mathfrak{M}(s, 1-z). \tag{5.10}$$

Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß die (3) und 4) entsprechende) andere Hälfte von (5.3) einfach durch Vertauschung von $s$ und $z$ bzw. von $\sigma$ und $x$ gewonnen werden kann. (5.6), (5.10) und Satz 1 liefern hiemit (5.2) für jeden fall 1)—4); (5.4) ergibt sich daraus für $z = \bar{s}$ unter Beachtung der Tatsache, daß $\Gamma(s)$ und $\zeta(s, u)$ $(0 < u \leqq 1)$ in konjugierten Punkten konjugierte Werte annehmen.

3° Um (5.5) zu erledigen, fassen wir die Darstellung

$$(\zeta(s, u), \zeta(z, u)) = 2(2\pi)^{s+\bar{z}-2}\,\Gamma(1-s)\,\Gamma(1-\bar{z}) \cos\frac{\pi}{2}(s-\bar{z})\,\zeta(2-s-\bar{z}) \tag{5.11}$$

ins Auge. Hierin sind $(2\pi)^{s-\bar{z}-2} = e^{(s+\bar{z}-2)\log(2\pi)}$, $\Gamma(1-s)$, $\Gamma(1-\bar{z})$ jedenfalls, $\zeta(2-s-\bar{z})$ aber für $2-(\sigma+x) > 1$, d. h. $\sigma + x < 1$ nullpunktsfrei; da (*) die letzte Bedingung enthält, so kann $(\zeta(s, u), \zeta(z, u))$ nebst (*) dann und nur dann verschwinden, falls $\cos\frac{\pi}{2}(s-\bar{z}) = 0$, d. h. $s - \bar{z} = 2\mu + 1$ $(\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ist, w. z. b. w.

**6.** Wir wollen noch einige Bemerkungen hinzufügen.

Es bieten sich zweierlei Verwendungsmöglichkeiten betreffs (4.1) und (4.2) dar.

Für $u \to 1-0$, $u \to +0$ und $u = \frac{1}{2}$ erhält man wegen $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$ bzw. $\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = (2^s - 1)\,\zeta(s)$ $(s \neq 1)$ solche Beziehungen, durch welche ein Wert von $\zeta(s)$ im kritischen Streifen sich mittels des Wertvorrates dergleichen Funktion auf einer vertikalen Geraden verbinden läßt; es sei gleich die aus (4.1) bei $u = \frac{1}{2}$ entspringende Relation

$$\pi^s(1-2^{s-1})\,\Gamma(s)^{-1}\zeta(1-s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \pi^{-z}\,\Gamma(z)\cos\frac{\pi}{2}(s-z)\,\zeta(s+z)\,dz \tag{6.1}$$

$$\left(\sigma > \frac{1}{2};\ s \neq 1, 2, \ldots;\ \max\{0, 1-\sigma\} < \alpha < \frac{1}{2}\right)$$

hervorgehoben. — Man kann (6.1) als eine „Integrofunktionalgleichung" für $\zeta(s)$, ein in gewisser Richtung *erweitertes Gegenstück zur Riemannschen Funk-*

*tionalgleichung* auffassen.[23]) Setzt man aber für ein festes $u$ einen bekannten Ausdruck von $\zeta(1-s, u)$ ein, so ergeben sich z. B. (vgl. (2.1), (2.5))

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \omega^{-z} \Gamma(z) \cos\frac{\pi}{2}(s-z)\,\zeta(s+z)\,dz = 2\pi i \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s} \cos\left(m\omega - \frac{\pi s}{2}\right) \tag{6.2}$$

$$\left(\sigma > \frac{1}{2},\ s \neq 1, 2, \ldots;\ 0 < \omega < 2\pi;\ \max\{0, 1-\sigma\} < a < \frac{1}{2}\right),$$

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (2\pi u)^{-z} \Gamma(z) \cos\frac{\pi}{2}(s-z)\,\zeta(s+z)\,dz = -\frac{\pi i (2\pi)^s}{\Gamma(s)} \left\{\frac{1}{s} u^s + \right. \tag{6.3}$$

$$\left. + (1-s) \int_0^{\infty} \bar{t}(u+t)^{s-2}\,dt \right\} \qquad (0 < \sigma < 1;\ 0 < u < 1;\ 0 < a < \min\{\sigma, 1-\sigma\}),$$

die auch unter Umständen bei der Untersuchung der „Zetawurzeln" mit $0 < \sigma + a < 1$ nützlich sein können.[24])

Was Satz 3 betrifft, so handelt es sich zugleich um die *Verallgemeinerung* gewisser oft benutzter Eigenschaften der *Bernoullischen Polynome.* (5.1) und (5.2) gehen nämlich für $s = 1 - \nu$ bzw. $s = 1 - k$, $z = 1 - l$ wegen $\zeta(1-\nu, u) = -(\nu-1)!\ B_\nu(u)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, $\zeta(2\mu) = (-1)^{\mu-1} B_{2\mu}(2\pi)^{2\mu}/2(2\mu)!$ $(\nu, \mu = 1, 2, \ldots)$ in die Formeln

$$\int_0^1 B_\nu(u)\,du = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots), \tag{6.4}$$

$$\int_0^1 B_k(u) B_l(u)\,du = 2\cos(k-l)\frac{\pi}{2}\,\frac{\zeta(k+l)}{(2\pi)^{k+l}} = \begin{cases} 0 \text{ für ungerades } k-l, \\ (-1)^{\frac{1}{2}(k-l)} B_{k+l}/(k+l)! \text{ für} \\ \qquad \text{gerades } k-l, \end{cases} \tag{6.5}$$

also in die Orthogonalitätsrelationen dieser Polynome über.[25])

---

[23]) Es sei $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Wir bemerken, daß dann in (6.1) linksseitig ein Wert mit $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ von $\zeta(s)$ steht, rechts aber nur Werte mit $\sigma > 1$ dieser Funktion in Betracht kommen, ferner ist (wie man leicht nachweisen kann) der Integrand im genannten Fall gewiß von Null verschieden.

[24]) Vgl. hierzu die von Hardy (*C. R. Paris,* 158 (1914), 1012—1014) benutzte Formel:

$$\Theta(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi u} = 1 + u^{-\frac{1}{2}} + (1/2\pi i) \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \Gamma(s/2)(\pi u)^{-s/2} \zeta(s)\,ds \qquad (u > 0)$$

Es sei noch erwähnt, daß ich mich in einer neuestens publizierten Arbeit[26]), an gewisse zahlentheoretische Fragen und an die asymptotischen Ergebnisse über $\int_0^1 |\zeta^*(s, u)|^2 du \left(\sigma \geqq \frac{1}{2}\right)$ von J. F. KOKSMA und C. G. LEKKERKERKER[27]) knüpfend, auch mit Integralen der Form

$$J_{a,b}(s) = \int_0^1 \bar{\zeta}(1-s, au)\, \bar{\zeta}(1-s, bu)\, du \qquad \left(\sigma > \frac{1}{2};\ a, b = 1, 2, \ldots\right)$$

beschäftigt habe; die angegebene Methode gestattet, allgemein

$$\int_0^1 \bar{\zeta}(s, au)\, \bar{\zeta}(z, bu)\, du \quad (\max\{0, \sigma\} + \max\{0, z\} < 1)$$

mit Hilfe der elementaren Funktionen, der Gamma- und Zetafunktion, ferner mittels des größten gemeinsamen Teilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $a$ und $b$ in geschlossener Form auszuwerten.

## Literaturverzeichnis.


[1] G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace-Transformation*, Bd. I (Basel, 1950).

[2] G. H. HARDY—W. W. ROGOSINSKI, *Fourier series* (Cambridge, 1944).

[3] K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, vierte Auflage (Berlin und Heidelberg, 1947).

[4] J. F. KOKSMA und C. G. LEKKERKERKER, A mean-value theorem for $\zeta(s, w)$, *Indagationes Math.*, **14** (1952), S. 446—452.

[5] E. LANDAU, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. II (Leipzig, 1927).

[6] E. LINDELÖF, *Le calcul des résidus et ses applications* (Paris, 1905).

[7] F. LÖSCH und F. SCHOBLIK, *Die Fakultät (Gammafunktion) und verwandte Funktionen* (Leipzig, 1951).

[8] HJ. MELLIN, Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, **24**, No. 10 (1899), 1—50.

[9] HJ. MELLIN, Über einen Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen, *Acta Math.*, **25** (1902), 139—164.

[10] HJ. MELLIN, Abriß einer einheitlichen Theorie der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen, *Math. Annalen*, **68** (1910), 305—337.


---

und etwas kompliziertere Transformationsformeln von RAMANUJAN (*Quarterly Journal of Math.*, **46** (1915) S. 253—260).

[25]) Vgl. z. B. [12], S. 31. Dem dortigen $B_\nu(x)$ entspricht $\nu!\, B_\nu(x)$ nebst unserer Bezeichnung.

[26]) Vgl. [11].

[27]) Vgl. [4].

[11] M. Mikolás, Integral formulae of arithmetical characteristics relating to the zeta-function of Hurwitz, *Publicationes Math. Debrecen.* (Im Erscheinen.)
[12] N. E. Nörlund, *Differenzenrechnung* (Berlin, 1924).
[13] W. Rogosinski, *Fouriersche Reihen* (Berlin—Leipzig, 1930).
[14] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals* (Oxford, 1937).
[15] E. C. Titchmarsh, *The zeta-function of Riemann* (Chambridge, 1944).
[16] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function* (Oxford, 1951).
[17] E. T. Whittaker und G. N. Watson, *A course of modern analysis*, vierte Auflage (Cambridge, 1952).

*(Eingegangen am 30. Dezember 1955.)*

# Die Translationen der Halbverbände.

Von G. SZÁSZ in Szeged.

**1. Einleitung.** A. H. CLIFFORD hat in seiner Arbeit [2] bezüglich einer speziellen Klasse von Halbgruppen ein Erweiterungsproblem vom Schreierschen Typ gelöst. Zur Bestimmung aller Erweiterungen mit den vorgeschriebenen Eigenschaften benützt er auch die sogenannten Rechts- und Linkstranslationen der Halbgruppen.

Da jeder Halbverband zur in [2] betrachteten Klasse der Halbgruppen gehört, kann man die Cliffordsche Erweiterungstheorie auf die Halbverbände ohne weiteres anwenden. Es scheint uns deshalb nicht ohne Interesse zu sein, die Translationen von Halbverbänden näher zu untersuchen.

**2. Allgemeines über Translationen von Halbverbänden.** Im Laufe unserer Betrachtungen werden wir stets mit $H$ einen Halbverband (d. h., eine kommutative Halbgruppe mit lauter idempotenten Elementen), und mit den Buchstaben $x, y$ beliebige (nicht notwendig verschiedene) Elemente von $H$ bezeichnen. Die griechischen Buchstaben werden eindeutige Abbildungen von $H$ in sich bedeuten.

Eine eindeutige Abbildung

$$\lambda:\ x \rightarrow \lambda(x) \quad (x, \lambda(x) \in H) \tag{1}$$

heißt eine *Translation von H,* wenn für sie

$$\lambda(xy) = \lambda(x) \cdot y \tag{2}$$

besteht. Eine Translation $\lambda$ heißt *speziell,* wenn es ein $c$ ($\in H$) mit $\lambda(x) = cx$ gibt.

Besitzt $H$ ein Einselement $e$, so folgt aus (2)

$$\lambda(y) = \lambda(ey) = \lambda(e) \cdot y = cy,$$

wobei $c$ das Bild des Einselements bedeutet. Dementsprechend *ist in einem Halbverband mit Einselement jede Translation speziell.*

Wir zeigen, daß die Umkehrung auch richtig ist: *Ist in einem Halbverband H jede Translation speziell, so besitzt H ein Einselement*[1]). Die iden-

[1]) Es ist leicht zu sehen, daß beide Behauptungen auch für beliebige Halbgruppen gültig bleiben, wenn man das Wort „Translation" durch „Linkstranslation (oder Rechtstranslation)" ersetzt.

tische Abbildung $\iota(x)=x$ ist offenbar eine Translation; ist sie speziell, so existiert ein $c$ in $H$, so daß $x=(\iota(x)=)cx$ indentisch gilt. Daraus folgt, daß dieses $c$ das Einselement von $H$ ist.

Aus dem gesagten folgt, daß unsere nachstehenden Sätze im Fall von Halbverbänden mit Einselement Trivialitäten enthalten; sie sind also nur für Halbverbände ohne Einselement interessant.

Hier beweisen wir noch den

Satz 1. *Eine eindeutige Abbildung* (1) *eines Halbverbands $H$ ist dann und nur dann eine Translation von $H$, wenn die Gleichungen*

$$\lambda(x)\cdot x=\lambda(x) \qquad (x\in H), \tag{3}$$

$$\lambda(x)\cdot y=\lambda(y)\cdot x \qquad (x,y\in H) \tag{4}$$

*identisch gelten.*

Beweis. Zuerst beweisen wir, daß die Bedingungen des Satzes hinreichend sind. Durch wiederholte Anwendung von (3), (4) und mit Rücksicht auf die Halbverbandseigenschaften ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned}\lambda(x)\cdot y=\lambda(x)\cdot x\cdot y=\lambda(x)\cdot xy=\lambda(xy)\cdot x=\\ =\lambda(xy)\cdot xy\cdot x=\lambda(xy)\cdot xy=\lambda(xy),\end{aligned}$$

wonach (2) in der Tat eine Folgerung von (3), (4) ist.

Die Bedingungen sind auch notwendig. Setzt man nämlich $y=x$ in (2), so folgt

$$\lambda(x)\cdot x=\lambda(xx)=\lambda(x);$$

ferner ergibt sich, durch zweifache Anwendung von (2),

$$\lambda(x)\cdot y=\lambda(xy)=\lambda(yx)=\lambda(y)\cdot x.$$

Damit haben wir den Beweis beendet.

**3. Die Translationen von Halbverbänden als Endomorphismen.** Wir schicken noch einige Definitionen voraus.

Wie üblich, verstehen wir unter einem *Endomorphismus* von $H$ eine eindeutige Abbildung $\varphi$: $x\rightarrow\varphi(x)$ $(x,\varphi(x)\in H)$ mit der Eigenschaft $\varphi(xy)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$. Wir werden einen Endomorphismus $\varphi$ (oder allgemeiner, eine beliebige Abbildung $\varphi$) *idempotent* nennen, wenn sie der Gleichung $\varphi(\varphi(x))=\varphi(x)$ genügt.

Eine Teilmenge $M$ von $H$ heißt ein *Ideal* (von $H$), wenn aus $a\in M$, $x\in H$ immer $ax\in M$ folgt.

In diesem Paragraphen beweisen wir den

Satz 2. *Jede Translation $\lambda$ eines Halbverbands $H$ ist ein idempotenter Endomorphismus, und die Menge aller Bildelemente ist ein Ideal von $H$. Ist,* *umgekehrt, $\varphi$ ein idempotenter Endomorphismus von $H$, bei dem die Menge aller Bildelemente ein Ideal von $H$ bildet, so definiert $\varphi$ eine Translation von $H$.*

Beweis. Es sei $\lambda$ eine Translation des Halbverbands $H$. Nach Satz I besteht dann die Gleichung (4). Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit $\lambda(x)$, so ergibt sich

$$\lambda(x)\cdot y = \lambda(y)\cdot x\cdot\lambda(x);$$

wendet man jetzt auf die linke bzw. rechte Seite (2) bzw. (3) an, so folgt

$$\lambda(xy) = \lambda(y)\cdot\lambda(x) = \lambda(x)\cdot\lambda(y).$$

Hiernach ist die Translation $\lambda$ ein Endomorphismus von $H$.

Setzt man jetzt $x=\lambda(y)$ in (3) ein, so entsteht die Gleichung

$$\lambda(\lambda(y))\cdot\lambda(y) = \lambda(\lambda(y)). \tag{5}$$

Andererseits ist, wieder nach (3),

$$\lambda(y)\cdot y = \lambda(y). \tag{6}$$

Multipliziert man (6) mit $\lambda(\lambda(y))$, so gewinnt nach (5)

$$\lambda(\lambda(y))\cdot y = \lambda(\lambda(y)).$$

Hieraus folgt nach (4)

$$\lambda(\lambda(y)) = \lambda(\lambda(y))\cdot y = \lambda(y)\cdot\lambda(y) = \lambda(y),$$

was genau die Idempotenz von $\lambda$ bedeutet.

Es sei jetzt $a$ ein beliebiges Bildelement bei der Translation $\lambda$; dann existiert mindestens ein $t(\in H)$, so daß $a=\lambda(t)$ ist. Ist ferner $x$ ein beliebiges Element von $H$, so folgt nach (2)

$$ax = \lambda(t)\cdot x = \lambda(tx),$$

d. h., daß das Element $ax$ auch ein Bildelement ist. Damit ist die erste Hälfte des Satzes bewiesen.

Andererseits betrachten wir einen idempotenten Endomorphismus $\varphi$ von $H$, bei dem die Menge der Bildelemente ein Ideal von $H$ ist. Letzteres bedeutet, daß (nicht nur $\varphi(x)$, sondern auch) $\varphi(x)\cdot y$ ein Bildelement ist. Folglich existiert ein $a(\in H)$, das der Gleichung $\varphi(x)\cdot y=\varphi(a)$ genügt. Ferner gilt nach den Voraussetzungen auch $\varphi(\varphi(a))=\varphi(a)$. Es folgt also die Gleichung

$$\varphi(x)\cdot y = [\varphi(a) = \varphi(\varphi(a)) = ]\,\varphi(\varphi(x)\cdot y). \tag{7}$$

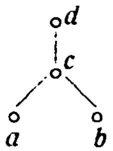
Da aber $\varphi$ ein Endomorphismus — und zwar, ein idempotenter — ist, läßt sich die rechte Seite von (7) so umformen:

$$\varphi(\varphi(x)\cdot y) = \varphi(\varphi(x))\cdot\varphi(y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y) = \varphi(xy). \tag{8}$$

Aus (7) und (8) ergibt sich nun sofort (2), womit der Beweis des Satzes beendet ist.

Bemerkung. Die Bedingung, daß die Bildelemente bei dem Endomorphismus $\varphi$ in der Rede ein Ideal bilden, ist wesentlich. Man betrachte nämlich den Halbverband H, der durch das HASSE-Diagramm[2])

(9)



gegeben ist, und definiere die Abbildung $\psi$ durch

(10) $$\psi(a)=a, \quad \psi(b)=\psi(c)=\psi(d)=d.$$

Dann kann man sich leicht überzeugen, daß die Abbildung $\psi$ ein idempotenter Endomorphismus von H ist, bei dem aber die Menge aller Bildelemente kein Ideal ist[3]); und in der Tat ist $\psi$ keine Translation von H, weil nach (9) und (10)

$$\psi(a)\cdot b=ab=c,$$

dagegen

$$\psi(ab)=\psi(c)=d$$

ist.

**4. Die Translationen von Halbverbänden als Hüllenoperationen.** Es sei $H$ ein beliebiger Halbverband. Es ist bekannt ([3], Seite 22, Théorème 1), daß in $H$ die Relation

„$x \leqq y$ *dann und nur dann, wenn* $xy=y$ *ist*"

eine Halbordnung definiert. Wir nennen sie die *natürliche Halbordnung* von $H$.

Eine eindeutige Abbildung $\sigma\colon\ x \to \sigma(x)\,(x,\ \sigma(x) \in H)$ eines Halbverbands $H$ heißt eine *Hüllenoperation*[4]), wenn sie den Bedingungen

(*Extensivität:*) $$x \leqq \sigma(x)$$

(*Idempotenz:*) $$\sigma(\sigma(x))=\sigma(x)$$

(*Monotonität:*) $$\textit{aus } x \leqq y \textit{ folgt } \sigma(x) \leqq \sigma(y)$$

genügt, wobei $\leqq$ eine beliebige Halbordnung bedeuten darf. Es ist bekannt (ISÉKI [5], Theorem 1), daß diese Bedingungen für die natürliche Halb-

---

[2]) Für die Bedeutung des HASSE-Diagramms siehe z. B. [4], Seite 8.

[3]) Nämlich ist $a(=\psi(a))$ ein Bildelement, dagegen $ac=c$ kein Bildelement bei $\psi$.

[4]) Siehe [1], Seite 49.

ordnung der einzigen Bedingung

$$x\cdot\sigma(\sigma(x))\leqq\sigma(xy) \tag{11}$$

äquivalent sind.

Wir beweisen den

Satz 3. *Jede Translation eines Halbverbands ist für die natürliche Halbordnung eine Hüllenoperation.*

Beweis. Nach dem oben gesagten genügt es zu zeigen, daß die Ungleichung (11) für jede Translation $\lambda$ und für die natürliche Halbordnung des Halbverbands $H$ erfüllt ist. Nach Satz 2 und nach den Gleichungen (3), (2) folgt aber sofort

$$x\cdot\lambda(\lambda(x))=x\cdot\lambda(x)=\lambda(x)\leqq\lambda(x)\cdot y=\lambda(xy),$$

was zu beweisen war.

Wir bemerken noch, daß die Abbildung $\psi$ im Beispiel des vorigen Paragraphen auch eine Hüllenoperation ist.

## Literatur.


[1] G. Birkhoff, *Lattice theory* (Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. **25**), revised edition (New York, 1948).

[2] A. H. Clifford, Extensions of semigroups, *Transactions Amer. Math. Soc.*, **68** (1950), 165—173.

[3] M. L. Dubreil-Jacotin—L. Lesieur—R. Croisot, *Théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques* (Cahiers scientifiques, fasc. XXI, Paris, 1953).

[4] H. Hermes, *Einführung in die Verbandstheorie* (Die Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. LXXIII, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955).

[5] K. Iséki, On closure operation in lattice theory, *Proceedings Acad. Amsterdam*, **54** (1951), 318—320.


*(Eingegangen am 3. Oktober 1956.)*

# Über die Quasiideale von Ringen.

*Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor L. Rédei gewidmet,*

Von O. STEINFELD in Szeged.

## § 1. Einleitung.

In zwei früheren Arbeiten [4], [5] haben wir die Quasiideale eines Ringes bzw. einer Halbgruppe definiert und einige Eigenschaften von ihnen festgestellt. Hier wollen wir diese Untersuchungen bezüglich Quasiideale der Ringe fortsetzen.

Wie in [4] wird ein Untermodul $\mathfrak{a}$ des Ringes $R$ ein *Quasiideal* genannt, wenn

$$R\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}R \subseteqq \mathfrak{a} \tag{1}$$

erfüllt ist. (Also ist jedes Links- oder Rechtsideal ein Quasiideal.) Ein Quasiideal, Linksideal, Rechtsideal $\mathfrak{a}$ von $R$ heißt *trivial,* wenn $\mathfrak{a}=(0)$ oder $\mathfrak{a}=R$ gilt. Ferner nennen wir ein Quasiideal $\mathfrak{b}$ von $R$ *minimal,* wenn $R$ kein Quasiideal $\mathfrak{b}'$ mit $(0)\subset\mathfrak{b}'\subset\mathfrak{b}$ hat. (Letztere Definition entspricht genau dem bekannten Begriff der minimalen Links- oder Rechtsideale.)

Wir faßen den Inhalt vorliegender Arbeit kurz zusammen:

Im § 2 machen wir einige einfache Vorbereitungen, wobei wir auch die Resultate der Arbeit [4] (ohne Beweis) wiederholen. Wir heben die leichten Resultate hervor, daß jedes Quasiideal ein Unterring ist und der Durchschnitt eines Links- und Rechtsideals ein Quasiideal ist.

Im § 3 beschäftigen wir uns mit den minimalen Quasiidealen. Es wird bewiesen, daß für ein minimales Linksideal $\mathfrak{l}$ und ein minimales Rechtsideal $\mathfrak{r}$ eines Ringes $R$ sowohl der Durchschnitt $\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}$ als auch das Produkt $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ entweder (0) oder ein minimales Quasiideal von $R$ ist.[1]) Als Hauptresultat bekommen wir, daß ein minimales Quasiideal von $R$ ein Zeroring[2]) oder ein Schiefkörper ist. Aus diesen Ergebnissen folgt unmittelbar, daß der Durch-

[1]) Ob das Produkt $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\,(\neq(0))$ ein minimales Ideal von $R$ ist, ist eine offene Frage.

[2]) Unter einem *Zeroring* versteht man einen Ring, in welchem das Produkt von zwei beliebigen Elementen stets Null ist.

schnitt $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ und das Produkt $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ ein Zeroring oder ein Schiefkörper ist. Wir geben auch eine hinreichende Bedingung an, damit ein mindestens ein minimales Quasiideal enthaltender Ring einer mit Einselement ist.

Im § 4 beweisen wir einige Eigenschaften der minimalen Quasiideale eines Ringes ohne Radikal.[3]) Es gilt u. a., daß jedes minimale Quasiideal eines solchen Ringes als der Durchschnitt eines geeigneten minimalen Linksideals und minimalen Rechtsideals darstellbar ist.

## § 2. Allgemeines über Quasiideale.

Lemma 1. *Jedes Quasiideal* $\mathfrak{a}$ *eines Ringes* $R$ *ist ein Unterring von* $R$

Beweis. Nach der Definition des Quasiideals ist $\mathfrak{a}$ ein Modul. Wegen $\mathfrak{a}^2 \subseteqq R\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}R \subseteqq \mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{a}$ ein Unterring von $R$.

Lemma 2 (Steinfeld [4] Satz 3). *Ein Schiefkörper hat nur triviale Quasiideale.*

Lemma 3 (Steinfeld [4] Satz 2). *Enthält der Ring* $R$ *mindestens ein nicht-triviales Quasiideal, so besitzt er auch mindestens ein nicht-triviales Linksideal und Rechtsideal.*

Lemma 4. *Der Durchschnitt von zwei Quasiidealen* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ *eines Ringes* $R$ *ist ein Quasiideal von* $R$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$. Da $\mathfrak{a}_0$ ein Modul ist und wegen

$$R\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{a}_0 R \subseteqq \begin{cases} R\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_1 R \subseteqq \mathfrak{a}_1 \\ R\mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{a}_2 R \subseteqq \mathfrak{a}_2 \end{cases}$$

auch

$$R\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{a}_0 R \subseteqq \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_0$$

gilt, ist unsere Behauptung richtig.

Ähnlich sieht man folgendes ein:

Lemma 5. *Der Durchschnitt eines Quasiideals und eines Unterringes* $S$ *des Ringes* $R$ *ist ein Quasiideal von* $S$.

Lemma 6. *Der Durchschnitt eines Linksideals und eines Rechtsideals eines Ringes* $R$ *ist ein Quasiideal von* $R$.[4])

---

[3]) Ein *Ring ohne Radikal* ist ein Ring, in dem das Nullideal das einzige nilpotente einseitige Ideal ist.

[4]) Wir bemerken, daß in Halbgruppen auch die Umkehrung gilt (Steinfeld [5] Satz 1), daß jedes Quasiideal als der Durchschnitt eines geeigneten Links- und Rechtsideals darstellbar ist. Das ähnliche ringtheoretische Problem von Professor L. Fuchs ist noch eine offene Frage. Diesbezüglich siehe doch Korollar 1.

Beweis. Da ein einseitiges Ideal des Ringes R ein Quasiideal von R ist, folgt Lemma 6 unmittelbar aus Lemma 4.

Lemma 7 (STEINFELD [4] Hilfssatz 2). *Wenn es für ein Quasiideal* $\mathfrak{a}$ *des Ringes* $R$ *entweder* $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}R$ *oder* $\mathfrak{a}\subseteq R\mathfrak{a}$ *gilt, so ist* $\mathfrak{a}$ *der Durchschnitt eines geeigneten Links- und Rechtsideals.*

Daraus folgt sofort:

Korollar 1 (STEINFELD [4]). *Wenn der Ring* $R$ *ein einseitiges Einselement enthält, so ist jedes Quasiideal von* $R$ *als Durchschnitt eines Linksideals und eines Rechtsideals darstellbar.*

Lemma 8. *Es sei* $\varepsilon$ *ein idempotentes Element,* $\mathfrak{l}$ *ein Linksideal,* $\mathfrak{r}$ *ein Rechtsideal des Ringes* $R$. *Dann sind* $\varepsilon\mathfrak{l}$ *und* $\mathfrak{r}\varepsilon$ *Quasiideale von* $R$, *ferner gilt auch*

$$\varepsilon\mathfrak{l}=\mathfrak{l}\cap\varepsilon R \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}\varepsilon=R\varepsilon\cap\mathfrak{r}. \tag{2}$$

Beweis. Es genügt wegen Lemma 6 z. B. die Behauptung ($2_1$) nachzuweisen. Da $\varepsilon\mathfrak{l}\subseteq\mathfrak{l}\cap\varepsilon R$ offenbar gilt, haben wir nur $\mathfrak{l}\cap\varepsilon R\subseteq\varepsilon\mathfrak{l}$ einzusehen. Jedes Element des Durchschnitts $\mathfrak{l}\cap\varepsilon R$ ist in der Form

$$\varepsilon\varrho=\lambda \qquad (\varrho\in R, \lambda\in\mathfrak{l}) \tag{3}$$

darstellbar. Multiplizieren wir von links beide Seiten von (3) mit $\varepsilon$, so bekommen wir wegen $\varepsilon^2=\varepsilon$:

$$\varepsilon^2\varrho=\varepsilon\varrho=\varepsilon\lambda\in\varepsilon\mathfrak{l},$$

woraus $\mathfrak{l}\cap\varepsilon R\subseteq\varepsilon\mathfrak{l}$ folgt.

## § 3. Ergebnisse über minimale Quasiideale.

Es gilt die folgende Verschärfung vom Lemma 6:

Satz 1. *Der Durchschnitt eines minimalen Links- und Rechtsideals eines Ringes* $R$ *ist* (0) *oder ein minimales Quasiideal von* $R$.

Beweis. Es sei der Durchschnitt $\mathfrak{a}$ eines minimalen Linksideals $\mathfrak{l}$ und eines minimalen Rechtsideals $\mathfrak{r}$ von Null verschieden. Nach Lemma 6 ist $\mathfrak{a}$ ein Quasiideal. Setzen wir voraus, daß $\mathfrak{a}$ nicht minimal ist, so gibt es ein Quasiideal $\mathfrak{a}'(\neq(0))$ mit $\mathfrak{a}'\subset\mathfrak{a}$. Da auch $\mathfrak{a}'\subset\mathfrak{l}$ gilt, muß es wegen der Minimalität von $\mathfrak{l}$ entweder $R\mathfrak{a}'=(0)$ oder $R\mathfrak{a}'=\mathfrak{l}$ bestehen. Der Fall $R\mathfrak{a}'=(0)$ ist unmöglich; im entgegengesetzen Fall wäre nämlich $\mathfrak{a}'$ ein Linksideal von $R$ mit $(0)\subset\mathfrak{a}'\subset\mathfrak{l}$, was der Minimalität von $\mathfrak{l}$ widerspricht. Folglich muß $R\mathfrak{a}'=\mathfrak{l}$ erfüllt sein. Ebenso sieht man ein, dass $\mathfrak{a}'R=\mathfrak{r}$ gilt. Daraus bekommen wir wegen der Definition des Quasiideals

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r} = R\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}'R \subseteq \mathfrak{a}',$$

was der Bedingung $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$ widerspricht. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Zu dem folgenden benutzen wir den

Hilfssatz (VAN DER WAERDEN [6] § 123). *Ein minimales Linksideal $\mathfrak{l}$ eines Ringes $R$ ist entweder nilpotent, und zwar ist dann schon $\mathfrak{l}^2 = (0)$, oder enthält $\mathfrak{l}$ ein idempotentes Element $\varepsilon$ und wird von diesem erzeugt:*

$$\varepsilon^2 = \varepsilon \quad \textit{in } \mathfrak{l}, \quad \mathfrak{l} = R\varepsilon.$$

Satz 2. *Ist $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{l}$ ein minimales Rechtsideal bzw. minimales Linksideal des Ringes $R$, so ist $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ entweder* (0) *oder ein minimales Quasiideal von $R$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq (0)$. Da $((0) \neq) \mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ gilt, genügt es wegen Satz 1 zu beweisen, daß $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ ein Quasiideal von $R$ ist. Zu diesem Zweck betrachten wir den Durchschnitt $D = R\mathfrak{r}\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}\mathfrak{l}R$. Offenbar gilt $D \subseteq \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$. Wegen Lemma 6 und Satz 1 besteht entweder

$$D = R\mathfrak{r}\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}\mathfrak{l}R = (0) \tag{4}$$

oder

$$D = R\mathfrak{r}\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}\mathfrak{l}R = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}. \tag{5}$$

Im Falle (4) ist $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ offenbar ein Quasiideal von $R$.

Aus (5) folgt wegen der Minimalität von $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{r}$ auch $R\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{l}$ und $\mathfrak{r}\mathfrak{l}R = \mathfrak{r}$. Wir behaupten, daß $\mathfrak{l}^2 \neq (0)$ ist. Im entgegengesetzen Falle bekommen wir nämlich wegen $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{r}\mathfrak{l}R \cdot R\mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{l} = (0)$ einen Widerspruch mit der Annahme. So gilt nach dem Hilfssatz $\mathfrak{l} = R\varepsilon$ mit einem idempotenten Element $\varepsilon$ von $\mathfrak{l}$, woraus wegen Lemma 8 folgt, daß $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{r}R\varepsilon = \mathfrak{r}\varepsilon$ wieder ein Quasiideal von $R$ ist. Damit haben wir Satz 2 bewiesen.

Jetzt beweisen wir unser Hauptresultat:

Satz 3. *Jedes minimale Quasiideal $\mathfrak{a}$ eines Ringes $R$ ist entweder ein Zeroring oder ein Schiefkörper, welches in der Form $\mathfrak{a} = \varepsilon R \varepsilon$ darstellbar ist, wo $\varepsilon$ das Einselement dieses Schiefkörpers bezeichnet.*[5]

Beweis. Wenn für jedes von Null verschiedene Elementepaar $\alpha, \beta \in \mathfrak{a}$

$$R\beta \cap \alpha R = (0) \tag{6}$$

gilt, so ist wegen $\alpha\beta \in R\beta \cap \alpha R$ das Produkt $\alpha\beta$ gleich Null, d. h. $\mathfrak{a}$ ist dann ein Zeroring, weshalb jetzt der Satz richtig ist.

---

[5]) Dies ist analog zum Satz 4a von [5].

Wenn dagegen ein Elementepaar $\alpha, \beta (\in \mathfrak{a}, \alpha \neq 0, \beta \neq 0)$ existiert, wofür (6) nicht erfüllt ist, so besteht wegen Lemma 6 und der Minimalität von $\mathfrak{a}$

(7) $$R\beta \cap \alpha R = \mathfrak{a} \qquad (\alpha, \beta \in \mathfrak{a}).$$

Nach (7) kann man jedes Element $\xi$ von $\mathfrak{a}$ in der Form

(8) $$\xi = \varrho\beta = \alpha\sigma \qquad (\xi \in \mathfrak{a}; \quad \varrho, \sigma \in R)$$

schreiben. Insbesondere für die Elemente $\alpha, \beta (\in \mathfrak{a})$ bestehen:

(9) $$\alpha = \varepsilon_1 \beta = \alpha \varepsilon_2 \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in R),$$

(10) $$\beta = \eta_1 \beta = \alpha \eta_2 \qquad (\eta_1, \eta_2 \in R),$$

aus denen wegen $\beta\alpha = \eta_1 \beta\alpha = \beta\alpha\varepsilon_2$

(11) $$\beta\alpha \in R\beta\alpha \cap \beta\alpha R$$

folgt.

Ist $\beta\alpha = 0$, so sieht man aus (8), daß das Produkt von zwei beliebigen Elementen von $\mathfrak{a}$ Null ist; d. h. $\mathfrak{a}$ ist wieder ein Zeroring.

Im restlichen Fall ist $\beta\alpha \neq 0$. Dann ist wegen (11) auch $R\beta\alpha \cap \beta\alpha R$ von Null verschieden, also muß wieder wegen Lemma 6 und der Minimalität von $\mathfrak{a}$

(12) $$R\beta\alpha \cap \beta\alpha R = \mathfrak{a}$$

bestehen. Aus (12) folgt, daß $\alpha, \beta (\in \mathfrak{a})$ auch in der Form

(13) $$\alpha = \mu_1 \beta\alpha = \beta\alpha\mu_2, \quad \beta = \nu_1 \beta\alpha = \beta\alpha\nu_2 \qquad (\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2 \in R)$$

darstellbar sind.

Betrachten wir jetzt das Element $\mu_1\beta\alpha\nu_2$. Dieses kann man nach (13) auch in der Form

(14) $$\mu_1\beta\alpha\nu_2 = \alpha\nu_2 = \mu_1\beta \qquad (\nu_2, \mu_1 \in R)$$

schreiben.

Aus (13) und $\beta \neq 0$ folgt $\alpha\nu_2 \neq 0$. Wegen (14) und (7) ist $\alpha\nu_2$ in $\mathfrak{a}$ enthalten. Ferner besteht wieder wegen (14) auch $\alpha\nu_2 \cdot \alpha\nu_2 = \mu_1\beta \cdot \alpha\nu_2 = \alpha\nu_2$. Folglich ist $\alpha\nu_2 (\neq 0)$ ein idempotentes Element von $\mathfrak{a}$. Bezeichnen wir es der Einfachkeit halber mit $\varepsilon (= \alpha\nu_2)$. Wegen $(0 \neq) \varepsilon \in R\varepsilon \cap \varepsilon R$, wegen Lemma 6 und der Minimalität von $\mathfrak{a}$ muß

(15) $$R\varepsilon \cap \varepsilon R = \mathfrak{a} \qquad (\varepsilon^2 = \varepsilon \in \mathfrak{a})$$

bestehen. Da wir wegen (2) $\varepsilon R \varepsilon$ statt der linken Seite von (15) schreiben können, ist auch

(16) $$\mathfrak{a} = \varepsilon R \varepsilon \qquad (\varepsilon^2 = \varepsilon \in \mathfrak{a})$$

richtig. Wir beweisen, daß $\mathfrak{a} = \varepsilon R \varepsilon$ ein Schiefkörper ist. Da $\mathfrak{a}$ nach Lemma 1 ein Ring und $\varepsilon$ wegen (16) ein linksseitiges Einselement von $\mathfrak{a}$ ist, brauchen wir nur einzusehen, daß es zu jedem Element $\varepsilon\varrho\varepsilon(\neq 0, \in \mathfrak{a})$ mindestens ein Element $\varepsilon\sigma\varepsilon$ mit $\varepsilon\sigma\varepsilon\cdot\varepsilon\varrho\varepsilon = \varepsilon$ gibt. Da einerseits $\varepsilon R\varepsilon\cdot\varepsilon\varrho\varepsilon \neq (0)$, andererseits $\varepsilon R\varepsilon\cdot\varepsilon\varrho\varepsilon \subseteqq \varepsilon R\varepsilon = \mathfrak{a}$ gilt, muß wegen Lemma 8 und der Minimalität von $\mathfrak{a}$

$$\varepsilon R\varepsilon\cdot\varepsilon\varrho\varepsilon = \varepsilon R\varepsilon = \mathfrak{a}$$

erfüllt sein, womit unsere Behauptung und zugleich Satz 3 bewiesen ist.

Aus den Sätzen 1, 2, 3 und dem Hilfssatz bekommen wir leicht die folgenden Ergebnisse, die als ein ringtheoretisches Analogon der Resultate von CLIFFORD [2] Lemmas 3·2, 3·3, 3·4 betrachtet werden können.

Korollar 2. *Ist* $\mathfrak{l}$ *bzw.* $\mathfrak{r}$ *ein minimales Linksideal bzw. minimales Rechtsideal des Ringes* $R$*, so gelten:*

A) *Jedes von* $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}$ *ist entweder ein Zeroring oder ein Schiefkörper,*[6])

B) *im Falle* $\mathfrak{l}^2 \neq (0)$ *und* $\mathfrak{r}^2 \neq (0)$ *ist* $\mathfrak{l} = R\varepsilon_k$ $(\varepsilon_k^2 = \varepsilon_k)$, $\mathfrak{r} = \varepsilon_i R$ $(\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i)$, $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{l}\cap\mathfrak{r} = \varepsilon_i R\varepsilon_k$.

Wir bemerken, daß für ein minimales Linksideal $\mathfrak{l}$ und minimales Rechtsideal $\mathfrak{r}$ eines Ringes die Gleichung $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}$ im allgemeinen falsch ist.[7]) Z. B. ist nämlich in dem Ring der Elemente $0, a, b, a+b$ mit den definierenden Relationen $2a = 2b = 0$, $a^2 = a$, $ab = b$, $ba = b^2 = 0$ das Hauptideal $(b)$ ein minimales Linksideal und zugleich ein minimales Rechtsideal. Wegen $(b)^2 = (0)$ und $(b)\cap(b) = (b)$ ist unsere Bemerkung richtig.

Ein Teil vom Satz 3 läßt sich umkehren:

Satz 4. *Wenn ein Quasiideal* $\mathfrak{a}$ *eines Ringes* $R$ *ein Schiefkörper ist, so ist* $\mathfrak{a}$ *ein minimales Quasiideal von* $R$.

Beweis. Setzen wir voraus, daß $\mathfrak{a}$ nicht minimal ist. Dann gibt es ein Quasiideal $\mathfrak{a}'$ mit

$$(0) \subset \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}. \tag{17}$$

Da $\mathfrak{a}'$ wegen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}'\mathfrak{a} \subseteqq R\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}'R \subseteqq \mathfrak{a}'$ ein Quasiideal des Schiefkörpers $\mathfrak{a}$ ist, so widerspricht (17) dem Lemma 2, womit Satz 4 bewiesen ist.

Folgendes Beispiel zeigt, daß ähnliches für ein Quasiideal, das ein Zeroring ist, im allgemeinen falsch ist. Im Ringe $R_n$ $(n \geqq 3)$ aller $n\times n$ Matrizen über dem Ring $R$ ist nämlich die Menge $\mathfrak{a}$ der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \qquad (a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n} \in R)$$

---

6) Es ist leicht die Behauptung über $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ unmittelbar (ohne Sätze 1, 2, 3) zu beweisen.

7) L. KOVÁCS [3] gab eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit es für alle Linksideale $\mathfrak{l}$, Rechtsideale $\mathfrak{r}$ eines Ringes die Bedingung $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}$ gilt.

offenbar ein Quasiideal und zugleich ein Zeroring, jedoch ist $\mathfrak{a}$ kein minimales Quasiideal von $R_n$.

Wir beweisen noch zwei Sätze im Zusammenhang mit den minimalen Quasiidealen eines Ringes.

Satz 5. *Wenn* $\mathfrak{l}$ ($\mathfrak{r}$) *ein minimales Linksideal (Rechtsideal) und* $\varepsilon \in \mathfrak{l}$ ($\varepsilon \in \mathfrak{r}$) *ein idempotentes Element des Ringes $R$ ist, so ist* $\varepsilon\mathfrak{l}$ ($\mathfrak{r}\varepsilon$) *ein Schiefkörper, sogar ein minimales Quasiideal von $R$.*

Beweis. Es genügt unsere Behauptung bezüglich $\varepsilon\mathfrak{l}$ nachzuweisen. Da $\varepsilon\mathfrak{l}$ nach Lemma 8 ein Quasiideal von $R$ ist, haben wir wegen Satz 4 nur zu beweisen, daß $\varepsilon\mathfrak{l}$ ein Schiefkörper ist. Da $\varepsilon\mathfrak{l}$ nach Lemma 1 ein Unterring von $R$ ist, so haben wir nur einzusehen, daß die Menge der von Null verschiedenen Elemente von $\varepsilon\mathfrak{l}$ eine Gruppe ist. $\varepsilon$ ist offenbar ein linksseitiges Einselement von $\varepsilon\mathfrak{l}$. Es sei $\varepsilon\lambda (\neq 0, \lambda \in \mathfrak{l})$ ein beliebiges Element von $\varepsilon\mathfrak{l}$. Wegen $\varepsilon, \lambda \in \mathfrak{l}$ und $\varepsilon^2 = \varepsilon$ gilt $(0) \neq \mathfrak{l} \cdot \varepsilon\lambda \subseteq \mathfrak{l}$, woraus wegen der Minimalität des Linksideals $\mathfrak{l}$

$$\mathfrak{l} \cdot \varepsilon\lambda = \mathfrak{l}$$

folgt. Hiernach gilt $\varepsilon\mathfrak{l} \cdot \varepsilon\lambda = \varepsilon\mathfrak{l}$, woraus man sieht, daß es für jedes $\varepsilon\lambda (\neq 0, \in \varepsilon\mathfrak{l})$ mindestens ein Element $\varepsilon\lambda' \in \varepsilon\mathfrak{l}$ mit $\varepsilon\lambda' \cdot \varepsilon\lambda = \varepsilon$ gibt. Somit ist $\varepsilon\mathfrak{l}$ ein Schiefkörper, was unseren Beweis beendet.

Satz 6. *Enthält ein minimales Quasiideal $\mathfrak{a}$ eines Ringes $R$ mindestens ein reguläres**) *Element von $R$, so hat $R$ sein Einselement.*

Beweis. Für ein reguläres Element $\alpha (\in \mathfrak{a})$ des Ringes $R$ gilt $\alpha^2 \neq 0$, also muß wegen Lemma 6 und der Minimalität des Quasiideals $\mathfrak{a}$

$$(0 \neq \alpha^2 \in) R\alpha \cap \alpha R = \mathfrak{a}$$

bestehen, woraus $\mathfrak{a} \subseteq R\alpha$ folgt. Hiernach gibt es zu dem Element $\alpha (\in \mathfrak{a})$ mindestens ein Element $\varepsilon (\in R)$ mit

$$\varepsilon\alpha = \alpha \qquad (\varepsilon \in R, \alpha \in \mathfrak{a}). \tag{18}$$

Wegen der Regularität von $\alpha$ ist das Element $\varepsilon$ eindeutig bestimmt. Für irgendein Element $\varrho (\in R)$ folgt aus (18) $\varrho\varepsilon\alpha = \varrho\alpha$, woraus wir wieder wegen der Regularität von $\alpha$

$$\varrho\varepsilon = \varrho \qquad (\varrho \in R) \tag{19}$$

bekommen. $\varepsilon$ ist also ein rechtsseitiges Einselement von $R$. Aus (19) folgt insbesondere $\alpha\varepsilon = \alpha$ ($\alpha \in \mathfrak{a}$). Hieraus ergibt sich, wie oben, die Gleichung $\varepsilon\varrho = \varrho$ ($\varrho \in R$), womit Satz 6 bewiesen ist.

---

*) Ein Element $\alpha$ des Ringes $R$ heißt *regulär*, wenn für $\alpha$ die zweiseitige Kürzungsregel gilt.

## § 4. Über Ringe ohne Radikal.

Wir beweisen, daß für die Ringe ohne Radikal folgende Umkehrung vom Satz 1 gilt.

Satz 7. *Jedes minimale Quasiideal* $\mathfrak{a}$ *eines Ringes* $R$ *ohne Radikal ist der Durchschnitt eines geeigneten minimalen Linksideals und minimalen Rechtsideals, folglich gilt* $\mathfrak{a}=\varepsilon_i R \varepsilon_k$ $(\varepsilon_i^2=\varepsilon_i,\ \varepsilon_k^2=\varepsilon_k)$.

Beweis. Wegen (1) und der Minimalität von $\mathfrak{a}$ sind nur die folgenden zwei Fälle

$$R\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}R=\begin{cases}(0)\\ \mathfrak{a}\end{cases} \tag{20}$$

möglich.

Es sei zuerst $R\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}R=(0)$. Es ist entweder $R\mathfrak{a}=(0)$ oder $R\mathfrak{a}\neq(0)$ erfüllt. Im Falle $R\mathfrak{a}=(0)$ bildet $\mathfrak{a}\neq(0)$ ein Linksideal mit $\mathfrak{a}^2=(0)$, was der Voraussetzung, daß $R$ ohne Radikal ist, widerspricht. Im Falle $R\mathfrak{a}\neq(0)$ betrachten wir das Produkt $\mathfrak{a}R\mathfrak{a}$. Dieses ist wegen $\mathfrak{a}R\mathfrak{a}\supseteqq R\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}R=(0)$ gleich Null, woraus $R\mathfrak{a}\cdot R\mathfrak{a}=(0)$ folgt, was wegen $R\mathfrak{a}\neq(0)$ wieder unmöglich ist.

Es sei dann $R\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}R=\mathfrak{a}$. Wir behaupten, daß $R\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{a}R$ ein minimales Linksideal bzw. minimales Rechtsideal von $R$ ist. Es genügt die Behauptung über $R\mathfrak{a}$ zu beweisen. Setzen wir voraus, daß $R\mathfrak{a}$ nicht minimal ist. So existiert ein Linksideal $\mathfrak{l}$ mit

$$(0)\subset\mathfrak{l}\subset R\mathfrak{a}. \tag{21}$$

Wegen Lemma 6 und der Minimalität von $\mathfrak{a}$ folgt aus $R\mathfrak{l}\cap\mathfrak{a}R\subseteqq R\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}R=\mathfrak{a}$ entweder

$$R\mathfrak{l}\cap\mathfrak{a}R=(0) \tag{22}$$

oder

$$R\mathfrak{l}\cap\mathfrak{a}R=\mathfrak{a}. \tag{23}$$

Im Falle (22) besteht wegen $\mathfrak{a}\mathfrak{l}\subseteqq R\mathfrak{l}\cap\mathfrak{a}R=(0)$ auch $\mathfrak{a}\mathfrak{l}=(0)$. Das impliziert $R\mathfrak{a}\mathfrak{l}=(0)$, woraus wegen (21) $\mathfrak{l}^2=(0)$ folgt, was aber unmöglich ist.

Im Falle (23) gilt wegen $\mathfrak{a}\subseteqq R\mathfrak{l}\subseteqq\mathfrak{l}$

$$R\mathfrak{a}\subseteqq\mathfrak{l},$$

was der Annahme (21) widerspricht. Damit ist die erste Behauptung des Satzes bewiesen.

Aus Hilfssatz, Lemma 8 und aus dem ersten Teil vom Satz 7 folgt unsere zweite Behauptung, was den Beweis beendet.

Satz 8 (Vgl. ARTIN—NESBITT—THRALL [1] Satz 5.4 A). *$R\varepsilon$ $(\varepsilon^2=\varepsilon)$ ist dann und nur dann ein minimales Linksideal eines Ringes $R$ ohne Radikal, wenn $\varepsilon R\varepsilon$ ein minimales Quasiideal von $R$ ist.*

Beweis. Ist $R\varepsilon$ ein minimales Linksideal von R, so ist nach Satz 5 $\varepsilon R\varepsilon$ ein minimales Quasiideal von $R$.

Umgekehrt, es sei $\varepsilon R\varepsilon$ ein minimales Quasiideal von R. Setzen wir voraus, daß $R\varepsilon$ nicht minimal ist. Dann hat $R$ ein Linksideal $\mathfrak{l}$ mit $(0)\subset\mathfrak{l}\subset R\varepsilon$. Es gilt: $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}\varepsilon$. Nach Lemma 8 ist $\varepsilon\mathfrak{l}\varepsilon(\subseteq\varepsilon R\varepsilon)$ ein Quasiideal von $R$. Es muß $\varepsilon\mathfrak{l}\varepsilon\neq(0)$ sein, denn aus $\varepsilon\mathfrak{l}\varepsilon=(0)$ folgt $\mathfrak{l}\varepsilon\cdot\mathfrak{l}\varepsilon=(0)$, was der Annahme, daß $R$ ohne Radikal ist, widerspricht. Das Element $\varepsilon(\in\varepsilon R\varepsilon)$ ist in $\varepsilon\mathfrak{l}\varepsilon$ nicht enthalten; im entgegengesetzten Falle wäre nämlich auch $R\varepsilon\subseteq R\varepsilon\mathfrak{l}\varepsilon\subseteq\mathfrak{l}\varepsilon=\mathfrak{l}$ erfüllt, was der Bedingung $\mathfrak{l}\subset R\varepsilon$ widerspricht. Damit haben wir bekommen, daß im Widerspruch zur Minimalität des Quasiideals $\varepsilon R\varepsilon$ ein Quasiideal $\varepsilon\mathfrak{l}\varepsilon$ mit $(0)\subset\varepsilon\mathfrak{l}\varepsilon\subset\varepsilon R\varepsilon$ existiert. Das beendet den Beweis vom Satz 8.

Es ist noch zu bemerken, daß nach Satz 5 in jedem Ring $R$ aus der Minimalität des Linksideals $R\varepsilon$ $(\varepsilon^2=\varepsilon)$ die des Quasiideals $\varepsilon R\varepsilon$ folgt, aber die Umkehrung im allgemeinen falsch ist. Um letzteres mit einem Beispiel zu zeigen betrachten wir den Ring $Q$ bestehend aus den Matrizen $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}$ wobei $a_{11}, a_{12}, a_{22}$ alle Elemente eines Schiefkörpers $K$ durchlaufen. Es bezeichnen $e$ das Einselement von $K$ und $\varepsilon_{12},\varepsilon_{22}$ die Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e\end{pmatrix}$. Es ist leicht einzusehen, daß $\varepsilon_{22}Q\varepsilon_{22}$ ein minimales Quasiideal von $Q$ ist. Dagegen ist $Q\varepsilon_{22}$ kein minimales Linksideal von $Q$, weil $Q\varepsilon_{12}$ ein Linksideal von $Q$ mit $(0)\subset Q\varepsilon_{12}\subset Q\varepsilon_{22}$ ist.

Da Satz 8 mit dem Rechtsideal $\varepsilon R$ statt $R\varepsilon$ ebenfalls gilt, bekommt man gleich das folgende bekannte:

Korollar 3 (ARTIN—NESBITT—THRALL [1] Korollar 5.4 B). *$R\varepsilon$ $(\varepsilon^2=\varepsilon)$ ist dann und nur dann ein minimales Linksideal des Ringes $R$ ohne Radikal, wenn $\varepsilon R$ ein minimales Rechtsideal von $R$ ist.*

Satz 9. *Sind die minimalen Linksideale $R\varepsilon_i, R\varepsilon_k$ $(\varepsilon_i^2=\varepsilon_i, \varepsilon_k^2=\varepsilon_k)$ eines Ringes $R$ ohne Radikal als Linksoperatormoduln operatorisomorph, so sind die minimalen Rechtsideale $\varepsilon_i R, \varepsilon_k R$ als Rechtsoperatormoduln operatorisomorph, und die minimalen Quasiideale $\varepsilon_i R\varepsilon_i, \varepsilon_k R\varepsilon_k$ als Ringe isomorph.*

Wir bemerken, daß die Rolle der minimalen Linksideale und Rechtsideale im Satz 9 natürlich vertauschbar ist.

Beweis vom Satz 9. Nach Korollar 3 sind $\varepsilon_i R, \varepsilon_k R$ minimale Rechtsideale von $R$. Da der Durchschnitt $\varepsilon_i R\varepsilon_i=\varepsilon_i R\cap R\varepsilon_i$ $(\varepsilon_k R\varepsilon_k=\varepsilon_k R\cap R\varepsilon_k)$

das Element $\varepsilon_i \neq 0$ ($\varepsilon_k \neq 0$) enthält, so sind $\varepsilon_i R \varepsilon_i$, $\varepsilon_k R \varepsilon_k$ nach Satz 1 minimale Quasiideale von $R$. Wir beweisen, daß auch $\varepsilon_i R \varepsilon_k = \varepsilon_i R \cap R \varepsilon_k$ und $\varepsilon_k R \varepsilon_i = \varepsilon_k R \cap R \varepsilon_i$ minimale Quasiideale von $R$ sind. Wegen Lemma 8 und Satz 1 genügt es einzusehen, daß $\varepsilon_i R \varepsilon_k$ und $\varepsilon_k R \varepsilon_i$ von Null verschieden sind.

Es bezeichne $\varrho \varepsilon_k (\in R \varepsilon_k)$ das Bild des Elementes $\varepsilon_i$ $(\in R \varepsilon_i)$ bei einem gegebenen Operatorisomorphus von $R \varepsilon_i$ auf $R \varepsilon_k$. Dann wird das Bild des Elementes $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_i (\neq 0, \in R \varepsilon_i)$ wegen der Operatorisomorphie $\varepsilon_i \cdot \varrho \varepsilon_k = \varepsilon_i \varrho \varepsilon_k \neq 0$ sein, woraus $\varepsilon_i R \varepsilon_k \neq (0)$ folgt. Ähnlich sieht man ein, daß auch $\varepsilon_k R \varepsilon_i \neq (0)$ gilt.

Um einen Operatorisomorphus von $\varepsilon_i R$ auf $\varepsilon_k R$ anzugeben, betrachten wir ein festes Element $\varepsilon_k \alpha \varepsilon_i (\neq 0)$ von $\varepsilon_k R \varepsilon_i$. Wir behaupten, daß $\varepsilon_i \varrho \rightarrow \varepsilon_k \alpha \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \varrho$ eine gewünschte Abbildung ist. Diese ist offenbar (rechtsseitig) operatorhomomorph. Die Menge $\mathfrak{r}$ der Elemente von $\varepsilon_i R$, denen die Null zugeordnet ist, ist ein Rechtsideal $\subseteqq \varepsilon_i R$ von $R$, also gilt wegen der Minimalität von $\varepsilon_i R$ entweder $\mathfrak{r} = (0)$ oder $\mathfrak{r} = \varepsilon_i R$. Da das Bild von $\varepsilon_i \varepsilon_i$ bei der obigen Abbildung $\varepsilon_k \alpha \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \varepsilon_i = \varepsilon_k \alpha \varepsilon_i \neq 0$ ist, muß $\mathfrak{r} = (0)$ sein, was die behauptete Operatorisomorphie beweist.

Um einen Isomorphus von $\varepsilon_i R \varepsilon_i$ auf $\varepsilon_k R \varepsilon_k$ anzugeben, bezeichne $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \neq 0$ ein festes Element von $\varepsilon_i R \varepsilon_k$. Wegen $(0) \neq R \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \subseteqq R \varepsilon_k$ und der Minimalität des Linksideals $R \varepsilon_k$ gilt $R \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k = R \varepsilon_k$, woraus auch $\varepsilon_k R \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k = \varepsilon_k R \varepsilon_k$ folgt. Dies bedeutet, daß mindenstens ein Element $\varepsilon_k \beta \varepsilon_i (\neq 0, \in \varepsilon_k R \varepsilon_i)$ mit $\varepsilon_k \beta \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k = \varepsilon_k$ existiert. Wir behaupten, daß das Element $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i$ von Null verschieden ist. Im entgegengesetzten Falle wäre $0 = \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k = \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k = \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k$, was unserer Annahme $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \neq 0$ widerspricht. Da $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon$ wegen

$$(\varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i)^2 = \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i = \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i = \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i$$

ein von Null verschiedenes idempotentes Element von $\varepsilon_i R \varepsilon_i$, und $\varepsilon_i R \varepsilon_i$ nach Satz 3 ein Schiefkörper ist, so muß $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i$ mit dem Einselement $\varepsilon_i$ von $\varepsilon_i R \varepsilon_i$ übereinstimmen. Wir beweisen, daß

$$\varepsilon_i \varrho \varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_k \beta \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \varrho \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k$$

eine isomorphe Abbildung von $\varepsilon_i R \varepsilon_i$ auf $\varepsilon_k R \varepsilon_k$ ist. Da diese Abbildung die Inverse $\varepsilon_k \sigma \varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \sigma \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i$ hat, und bezüglich der Addition offenbar homomorph ist, endlich wegen

$$\varepsilon_i \varrho \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \sigma \varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_k \beta \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \varrho \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \sigma \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k = \varepsilon_k \beta \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \varrho \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k \beta \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \sigma \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_k$$

ähnliches auch bezüglich der Multiplikation gilt, so ist sie isomorph.

## Literatur.

[1] E. Artin—C. J. Nesbitt—R. M. Thrall, *Rings with minimum condition* (Ann Arbor, Mich., 1948).

[2] A. H. Clifford, Semigroups containing minimal ideals, *Amer. J. Math.*, 70 (1948), 521—526.

[3] L. Kovács, A note on regular rings, *Publicationes Math. Debrecen*, 4 (1956), 465—468.

[4] O. Steinfeld, Bemerkung zu einer Arbeit von T. Szele, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 6 (1955), 479—484.

[5] O. Steinfeld, Über die Quasiideale von Halbgruppen, *Publicationes Math. Debrecen*, 4 (1956), 262—275.

[6] B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra* II (Berlin, 1955).

*(Eingegangen am 12. Juli 1956.)*

# Caractérisation des éléments de meilleure approximation dans un espace de Banach quelconque.

Par IVAN SINGER à Bucarest (Roumanie).

## § 1. Caractérisation des éléments de meilleure approximation dans le cas d'un sous-espace linéaire quelconque.

1. Soient $E$ un espace de Banach réel quelconque, $G$ un sous-espace linéaire de $E$ et $x$ un élément de $E$ n'appartenant pas à $G$. On appelle *élément de meilleure approximation de l'élément* $x$ tout élément $q \in G$ ayant la propriété

$$\|x-q\| = \inf_{z \in G} \|x-z\|.$$

Le problème que nous allons envisager est de *caractériser* les éléments de meilleure approximation d'un élément donné quelconque $x \in E$.

Un cas particulier important est celui où $G = G_n = [x_1, \ldots, x_n]$, c'est-à-dire où $G$ est le sous-espace linéaire de $E$ engendré par $n$ éléments linéairement indépendants donnés $x_1, \ldots, x_n$. Dans ce cas, en appelant *polynôme* toute combinaison linéaire $p = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ des $x_i$, il s'agit de caractériser les polynômes de meilleure approximation.

Jusqu'à présent, ce problème n'a été posé — et résolu — que dans quelques cas particuliers. Parmi ces résultats particuliers citons les suivants:

*a)* Soit $E = L(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur un ensemble quelconque $\Omega$ par rapport à une mesure complètement additive $m$, et soit $G$ un sous-espace linéaire de $E$. Pour que $q \in G$ soit un élément de meilleure approximation de $x \in E \setminus G$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_{\Omega} z(t) \operatorname{signe}[q(t) - x(t)]\, dm(t) = 0 \tag{1. 1}$$

pour tout $z \in G$ (cf. M. G. KREIN [1]).

*b)* Soit $E = H$ un espace hilbertien réel complet quelconque, et soit $G$ un sous-espace linéaire de $E$. Pour que $q \in G$ soit un élément de meilleure approximation de $x \in E \setminus G$, il faut et il suffit que l'on ait

(1.2) $$(z, q-x)=0$$

pour tout $z \in G$ (cf. par exemple [1]).

*c)* Soit $E=C(Q)$ l'espace de toutes les fonctions réelles continues sur un espace de Hausdorff bicompact $Q$, et soit $G=[x_1, \ldots, x_n]$, les éléments $x_i$ formant un système de Tchébychef sur $Q$. Pour que $q(t) \in G$ soit un polynôme de meilleure approximation de $x(t) \in E \setminus G$, il faut et il suffit que la fonction $q(t)-x(t)$ atteigne le maximum de son module en au moins $n+1$ points distincts $t_1, \ldots, t_{n+1}$ de $Q$, avec les signes

(1.3) $$\text{signe}\,[q(t_i)-x(t_i)] = \text{signe}\,(\Delta\Delta_i),$$

où $\Delta = \det \|x_1(t_k), \ldots, x_n(t_k), -x(t_k)\|_{k=1,\ldots,n+1}$ et $\Delta_i$ est le complémentaire algébrique de l'élément $-x(t_i)$ dans cette matrice (cf. E. Ya. Rémès [8] [1])).

Si $Q$ est le segment $\langle a, b\rangle$, on en retrouve le théorème connu de Tchébychef—Bernstein (v. [4]).

Dans le présent travail nous nous proposons de caractériser les éléments de meilleure approximation dans un espace de Banach quelconque.

**2.** Démontrons d'abord le

Théorème 1.1. *Pour que l'élément $q \in G$ soit un élément de meilleure approximation de l'élément $x \in E \setminus G$, il faut et il suffit qu'il existe une fonctionnelle linéaire $f \in E^*$ ayant les propriétés suivantes:*

(1.4) $$\|f\|=1,$$

(1.5) $$f(z)=0 \quad \textit{pour tout} \quad z \in G,$$

(1.6) $$f(x)=-\|q-x\|.$$

Démonstration. *Nécessité.* Si $q$ est un élément de meilleure approximation de $x$, on a $d=\inf\limits_{z \in G} \|x-z\| = \|x-q\| > 0$. En vertu d'une proposition de S. Banach (v. [3], p. 57, lemme), il existe alors une fonctionnelle linéaire $f \in E^*$ ayant les propriétés (1.4), (1.5) et (1.6) [2]).

*Suffisance.* S'il existe une fonctionnelle linéaire $f \in E^*$ ayant les propriétés (1.4), (1.5) et (1.6), on a pour tout $z \in G$

$$\|x-q\| = |f(x)| = |f(x)-f(z)| = |f(x-z)| \leqq \|x-z\|,$$

donc $q$ est un élément de meilleure approximation de l'élément $x$.

L'interprétation géométrique du théorème est évidente.

---

1) E. Ya. Rémès a supposé que $Q$ est un compact, mais nous allons voir qu'il suffit de supposer que $Q$ est un espace de Hausdorff bicompact.

2) En effet, si $\varphi$ est la fonctionnelle qui figure dans le lemme de Banach, on n'a qu'à poser $f=-d\varphi$.

Remarque. Le signe "moins" dans la formule (1.6) n'est pas essentiel; nous l'avons posé parce qu'il nous sera commode dans les applications.

**3.** Soit, en particulier, $E = L(\Omega)$. Nous allons montrer que, dans ce cas, du théorème 1.1 on retrouve facilement le théorème de M. G. Krein.

En tenant compte de la forme générale des fonctionnelles linéaires sur l'espace $L(\Omega)$, la condition du théorème signifie qu'il existe une fonction $\beta(t)$ ayant les propriétés suivantes:

$$\operatorname{vrai\,max}_{t \in \Omega} |\beta(t)| = 1, \tag{1.7}$$

$$\int_\Omega z(t)\beta(t)\,dm(t) = 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in G, \tag{1.8}$$

$$\int_\Omega [q(t)-x(t)]\beta(t)\,dm(t) = \int_\Omega |q(t)-x(t)|\,dm(t). \tag{1.9}$$

Les relations (1.7) et (1.9) entraînent $\beta(t) = \text{signe}\,[q(t)-x(t)]$. En effet, si l'on avait $[q(t)-x(t)]\beta(t) \neq |q(t)-x(t)|$ sur un ensemble $\Sigma \subset \Omega$ avec $m(\Sigma) > 0$, on aurait, en vertu de la relation (1.7), $[q(t)-x(t)]\beta(t) < < |q(t)-x(t)|$ presque partout sur $\Sigma$, d'où il résulterait

$$\int_\Omega [q(t)-x(t)]\beta(t)\,dm(t) < \int_\Omega |q(t)-x(t)|\,dm(t),$$

ce qui contredit à (1.9).

Donc l'existence d'une fonction $\beta(t)$ avec les propriétés (1.7)—(1.9) entraîne la relation (1.1).

D'autre part, si (1.1) est vérifié, la fonction $\beta(t) = \text{signe}\,[q(t)-x(t)]$ jouira évidemment des proprietés (1.7)—(1.9).

**4.** Si $E$ est un espace hilbertien, toute fonctionnelle linéaire est engendrée par un élément de $E$ en forme d'un produit scalaire, donc les conditions (1.4)—(1.6) signifient qu'il existe un $u \in E$ tel que

$$\|u\| = 1, \tag{1.10}$$

$$(z, u) = 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in G, \tag{1.11}$$

$$(x, u) = -\|q-x\|. \tag{1.12}$$

Or, la condition que pareil $u$ existe est équivalente avec la condition (1.2). En effet, s'il existe un $u$ avec les propriétés (1.10)—(1.12), on a $(q-x, u) = \|q-x\| = \|q-x\| \cdot \|u\|$, donc $u = \dfrac{q-x}{\|q-x\|}$ et, par conséquent, (1.2) découle de (1.11). D'autre part, si la condition (1.2) est vérifiée, l'élément $u = \dfrac{q-x}{\|q-x\|}$ jouira évidemment des propriétés (1.10)—(1.12).

3. Remarquons enfin que du théorème 1. 1 il résulte le suivant critère de l'unicité de l'élément de meilleure approximation:

*Pour que tout élément* $x \in E$ *ait au plus un élément* $q \in G$ *de meilleure approximation, il faut et il suffit qu'il n'existe aucune fonctionnelle linéaire* $f \in E^*$ *telle que* 1° $\|f\|=1$, 2° $f(z)=0$ *pour tout* $z \in G$, 3° $f(x)=\|x\|$ *pour du moins deux éléments différents* $x \in E$ *dont la différence appartient à* $G$.

Le théorème d'unicité ci-dessus se trouve implicitement dans le travail [6], mais sous une forme géométrique (v. [6], lemme 2. 1).

## § 2. Quelques propriétés des valeurs moyennes.

1. Soient $E$ un espace de Banach réel quelconque, $E^*$ l'espace adjoint et $S^*$ la sphère unité de $E^*$.

Soit $F$ un ensemble quelconque de points extrêmes non opposés (c'est-à-dire tels que $f \in F$ entraîne $-f \notin F$) de la sphère $S^*$, muni de la topologie induite par la topologie faible de $E^*$. A chaque élément $x \in E$ correspond, d'une façon naturelle, une fonction $x(f) \in C(F)$ définie par

(2. 1) $$x(f)=f(x) \quad \text{pour tout} \quad f \in F.$$

A chaque élément $x \in E$ et à chaque densité extérieure $\mu(e)$ de l'espace $F$ (au sens de A. A. Markoff; $\mu(F)=1$), nous ferons correspondre le nombre

(2. 2) $$m(x)=\int_F x(f)\, d\mu(e).$$

Nous dirons que, pour $\mu$ fixé, $m$ est une *valeur moyenne* de l'ensemble $F$.

Un exemple important est où $F$ est un ensemble fini:

(2. 3) $$F=\{f_1, \ldots, f_h\}.$$

Dans ce cas $m=\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_h f_h$, où $\lambda_i=\mu(\{f_i\}) \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{h} \lambda_i=1$; nous dirons que $m$ est une "combinaison convexe" des $f_i$.

Il s'ensuit immédiatement de la définition que $m$ est une fonctionnelle linéaire, $m \in E^*$, avec

(2. 4) $$\|m\| \leqq 1.$$

Rappelons encore la proposition suivante: Pour toute fonctionnelle linéaire $\varphi \in E^*$ avec $\|\varphi\|=1$ il existe un ensemble $F$ de points extrêmes non opposés de la sphère $S^*$ et une valeur moyenne $m$ de $F$, tels que $\varphi=m$ (cf. [6], lemme 1. 8).

2. On aura encore besoin de la suivante caractérisation des éléments de meilleure approximation:

Lemme 2.1. *Pour qu'un élément $q \in G$ soit un élément de meilleure approximation de l'élément $x \in E \setminus G$, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble $F$ de points extrêmes non opposés de la sphère $S^*$ et une valeur moyenne $m$ de $F$, tels que*

$$m(z) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad z \in G, \tag{2.5}$$

$$m(x) = -\|q - x\|. \tag{2.6}$$

Démonstration. La *nécessité* découle du théorème 1.1 et de la proposition mentionnée ci-dessus.

*Suffisance.* Si $x \in E \setminus G$ et si la condition du lemme 2.1 est vérifiée, les relations (2.4), (2.5) et (2.6) entraînent $\|m\| = 1$, donc la fonctionnelle linéaire $m \in E^*$ possède les propriétés (1.4)—(1.6) et, compte tenant du théorème 1.1, $q$ est un élément de meilleure approximation de $x$.

**3.** Nous allons enfin démontrer un lemme qui est également nécessaire dans ce qui suit.

Lemme 2.2. *Soient $E_k$ un espace de Banach de dimension finie $k$, $F$ un ensemble quelconque de points extrêmes non opposés de la sphère unité $S_k^*$ de l'espace adjoint $E_k^*$, et $m$ une valeur moyenne de l'ensemble $F$, avec $\|m\| = 1$. Il existe alors un ensemble $F_h = \{f_1, \ldots, f_h\}$ de points extrêmes non opposés de la sphère $S_k^*$, où $h \leqq k$, tel que $m$ soit une valeur moyenne de l'ensemble $F_h$ aussi.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où l'ensemble $F$ contient plus de $k$ éléments. Puisque par hypothèse $\|m\| = 1$, $m$ appartient à au moins une face $\Gamma$ de la sphère $S_k^*$. La face $\Gamma$ étant un ensemble extrême[3] de la sphère $S_k^*$, elle est régulièrement convexe, donc, en vertu du théorème connu de M. Krein et V. Chmoulyan (cf. p. ex. [6], p. 100) $m$ est une valeur moyenne de l'ensemble $F'$ des points extrêmes de cette face aussi. On voit aisément que $F'$ est un ensemble de points extrêmes non opposés de la sphère $S_k^*$ (cf. p. ex. [5], p. 60, proposition 1). Si l'ensemble $F'$ contient au plus $k$ éléments, le lemme 2.1 est démontré; supposons donc qu'il contient plus de $k$ éléments. Puisque la face $\Gamma$ appartient à une variété linéaire de dimension $k-1$ de $E_k^*$, en vertu des propriétés connues des corps convexes des espaces de dimension finie il résulte que, en prenant tous les polyèdres convexes engendrés par des groupes de $k$ éléments de l'ensemble $F'$, la réu—

---

[3]) Étant donné un ensemble convexe non vide $A$ d'un espace vectoriel réel $V$, on appelle ensemble extrême de $A$ toute partie convexe non vide $B$ de $A$, telle qu'il n'existe aucun segment de $A$ non contenu dans $B$ et contenant à l'intérieur un point de $B$ (v. [5], p. 60, définition 1).

nion de ces polyèdres recouvre la face $\Gamma$ entière. Étant donné que $m \in \Gamma$, il s'ensuit qu'il existe au moins un polyèdre convexe contenant $m$, engendré par $k$ éléments de l'ensemble $F'$; en prenant comme ensemble $F_k$ ces $k$ éléments (qui forment évidemment un ensemble de points extrêmes non opposés de la sphère $S_k^*$), il en résulte que $m$ est une valeur moyenne de l'ensemble $F_k$ aussi.

## § 3. Caractérisation des polynômes de meilleure approximation.

**1.** Soient $E$ un espace de Banach réel quelconque et $x_1, \ldots, x_n$ $n$ éléments linéairement indépendants de $E$. L'ensemble $G_n$ de tous les polynômes $p = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ est un sous-espace linéaire de $E$, donc le théorème 1. 1 constitue une caractérisation des polynômes de meilleure approximation. Or, en utilisant le fait que le sous-espace $G_n$ est de dimension finie $n$, on peut démontrer un théorème plus fort, convenable pour les applications:

Théorème 3. 1. *Pour que $q \in G_n$ soit un polynôme de meilleure approximation de l'élément $x \in E \setminus G_n$, il faut et il suffit qu'il existe $h \leqq n+1$ points extrêmes non opposés $f_1, \ldots, f_h$ de la sphère $S^*$ et une combinaison convexe $m = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_h f_h$ telle que*

$$m(x_i) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3. 1}$$

$$m(-x) = \|q - x\|. \tag{3. 2}$$

Démonstration. *Nécessité.* Si $q$ est un polynôme de meilleure approximation de l'élément $x \in E \setminus G_n$, il est également un polynôme de meilleure approximation de l'élément $x$ dans le sous-espace $E_{n+1} = [x_1, \ldots, x_n, x]$ de dimension $n+1$. Il existe donc, en vertu du lemme 2. 1, un ensemble de points extrêmes non opposés de la sphère unité $S_{n+1}^*$ de l'espace adjoint $E_{n+1}^*$ et une valeur moyenne $\overline{m}$ de l'ensemble $F$, avec $\|\overline{m}\| = 1$ (v. la démonstration du lemme 2. 1), tels que $\overline{m}$ vérifie (3. 1) et (3. 2). Or, en vertu du lemme 2. 2 il existe un ensemble $F_h = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_h\}$ de points extrêmes non opposés de la sphère $S_{n+1}^*$, où $h \leqq n+1$, tel que $\overline{m}$ soit une valeur moyenne de $F_h$: $\overline{m} = \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_h \varphi_h$. Mais les fonctionnelles linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_h \in E_{n+1}^*$ peuvent être prolongées sur l'espace $E$ entier avec la conservation de leurs normes, de façon que leurs extensions $f_1, \ldots, f_h \in E^*$ soient des points extrêmes (évidemment distincts et non opposés) de la sphère $S^*$ (v. [7], théorème 5). Il s'ensuit que $m = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_h f_h$ répond aux exigences du théorème. La condition du théorème est donc nécessaire.

*Suffisance.* Si la condition du théorème est vérifiée, la valeur moyenne $m = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_h f_h$ de l'ensemble $F = \{f_1, \ldots, f_h\}$ vérifie la condition du lemme 2.2, donc $q$ est un polynôme de meilleure approximation de l'élément $x$.

Remarque. Les relations $\lambda_i \geqq 0, \sum_{i=1}^{h} \lambda_i = 1$, (3.1) et (3.2) constituent $2h+1 \leqq 2n+3$ conditions sur les points extrêmes $f_1, \ldots, f_h$ et les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$.

**2.** Soit, en particulier, $E = C(Q)$, où $Q$ est un espace de Hausdorff bicompact, et supposons que les éléments $x_1, \ldots, x_n$ forment un système de Tchébychef sur $Q$. Nous allons montrer que, dans ce cas, du théorème 3.1 on retrouve le théorème de E. YA. RÉMÈS, cité au § 1.

*Nécessité.* Si $q$ est un polynôme de meilleure approximation de l'élément $x$, il existe, en vertu du théorème 3.1, $h \leqq n+1$ points extrêmes non opposés $f_1, \ldots, f_h$ de la sphère $S^*$ et une valeur moyenne $m = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_h f_h$ telle que l'on ait (3.1) et (3.2). Mais tout point extrême de la sphère $S^*$ est, comme l'ont démontré R. F. ARENS et J. L. KELLEY (v. par exemple [6], p. 101), de la forme

$$f(y) = \varepsilon y(t) \quad \text{pour tout} \quad y \in E,$$

où $t$ est un point quelconque fixe de $Q$ et $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$. Par conséquent, il existe $h \leqq n+1$ points distincts $t_1, \ldots, t_h \in Q$ et $h$ nombres non négatifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ de somme égale à 1, tels que

$$\lambda_1 \varepsilon_1 x_i(t_1) + \cdots + \lambda_h \varepsilon_h x_i(t_h) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3.3}$$

$$\lambda_1 \varepsilon_1 x(t_1) + \cdots + \lambda_h \varepsilon_h x(t_h) = -\|q - x\|, \tag{3.4}$$

où $\varepsilon_k = +1$ ou $-1$ $(k = 1, \ldots, h)$.

Les équations (3.3) entraînent

$$h = n+1. \tag{3.5}$$

En effet, elles impliquent que tous les mineurs d'ordre $h$ de la matrice $\|x_i(t_k)\|_{\substack{k=1,\ldots,h \\ i=1,\ldots,n}}$ sont nulles, donc, si l'on avait $h < n+1$, en choisissant arbitrairement[4]) des points distincts $t_{h+1}, \ldots, t_n \in Q$, différents de $t_1, \ldots, t_h$, il résulterait que $D = \det \|x_i(t_k)\|_{i,k=1,\ldots,n} = 0$, ce qui contredit à l'hypothèse que les éléments $x_1, \ldots, x_n$ forment un système de Tchébychef sur $Q$.

Les relations (3.3), (3.4) et (3.5) impliquent

$$\Delta = \det \|x_1(t_k), \ldots, x_n(t_k), -x(t_k)\|_{k=1,\ldots,n+1} \neq 0.$$

Les relations (3.3), (3.5) et l'hypothèse que les éléments (1.1) forment un système de Tchébychef entraînent

$$\lambda_k > 0 \qquad (k = 1, \ldots, n+1). \tag{3.6}$$

---

[4]) Les éléments $x_1, \ldots, x_n$ étant linéairement indépendants, $Q$ contient au moins $n$ points distincts.

D'autre part, de (3. 3), (3. 4) et (3. 5) on obtient

$$\lambda_1\varepsilon_1[q(t_1)-x(t_1)]+\cdots+\lambda_{n+1}\varepsilon_{n+1}[q(t_{n+1})-x(t_{n+1})]=\|q-x\|. \tag{3.7}$$

Les relations (3. 6) et (3. 7) entraînent évidemment

$$\varepsilon_i[q(t_i)-x(t_i)]=\|q-x\| \qquad (i=1,\ldots,n+1); \tag{3.8}$$

enfin, (3. 3), (3. 4), (3. 5) et (3. 6) etraînent

$$\varepsilon_i=\frac{1}{\lambda_i}\frac{-\|q-x\|\cdot\Delta_i}{-\Delta}=\operatorname{sgn}(\Delta\Delta_i) \qquad (i=1,\ldots,n+1),$$

c'est-à-dire (1. 3), et la nécessité de la condition de E. YA. RÉMÈS est ainsi démontrée.

*Suffisance.* Si la condition du théorème de RÉMÈS est vérifiée, on a $\Delta\neq 0$, et le système d'équations linéaires

$$\lambda_1\varepsilon_1x_i(t_1)+\cdots+\lambda_{n+1}\varepsilon_{n+1}x_i(t_{n+1})=0 \qquad (i=1,\ldots,n), \tag{3.9}$$

$$\lambda_1\varepsilon_1x(t_1)+\cdots+\lambda_{n+1}\varepsilon_{n+1}x(t_{n+1})=-\|q-x\|, \tag{3.10}$$

où l'on a posé $\varepsilon_i=$ signe $[q(t_i)-x(t_i)]$, possède la solution

$$\lambda_i\varepsilon_i=\frac{-\|q-x\|\cdot\Delta_i}{-\Delta}=\frac{\|q-x\|\cdot\Delta_i}{\Delta} \qquad (i=1,\ldots,n+1). \tag{3.11}$$

L'hypothèse (1. 3) et les relations (3. 11) entraînent

$$\lambda_k>0 \qquad (k=1,\ldots,n+1). \tag{3.12}$$

Enfin, de l'hypothèse $x(t_i)=q(t_i)-\varepsilon_i\|q-x\|$ $(i=1,\ldots,n+1)$ et des équations (3. 9) et (3. 10) on obtient

$$-\|q-x\|=\lambda_1\varepsilon_1[q(t_1)-\varepsilon_1\|q-x\|]+\cdots+\lambda_{n+1}\varepsilon_{n+1}[q(t_{n+1})-\varepsilon_{n+1}\|q-x\|]=$$
$$=-(\lambda_1+\cdots+\lambda_{n+1})\|q-x\|,$$

donc

$$\lambda_1+\cdots+\lambda_{n+1}=1. \tag{3.13}$$

Or, (3. 12) et (3. 13) montrent que la fonctionnelle linéaire

$$m(y)=\lambda_1\varepsilon_1y(t_1)+\cdots+\lambda_{n+1}\varepsilon_{n+1}y(t_{n+1}) \quad \text{pour tout} \quad y\in E$$

est une valeur moyenne de l'ensemble $F=\{\varepsilon_1y(t_1),\ldots,\varepsilon_{n+1}y(t_{n+1})\}$ de points extrêmes non opposés de la sphère $S^*$. En même temps, (3. 9) et (3. 10) montrent que l'on a (3. 1) et (3. 2). Donc, en vertu du théorème 3. 1, $q$ est un polynôme de meilleure approximation de l'élément $x$.

Remarque. Dans les espaces $C(Q)$, la notion de "système de Tchébychef" admet, comme nous l'avons démontré (v. [6], p. 131), la suivante caractérisation géométrique: Les éléments $x_1,\ldots,x_n$ forment un système de

Tchébychef si, et seulement si, quel que soit le polynôme $p_0 \in G_n$, il n'existe pas $n$ faces non opposées $F_1, \ldots, F_n$ de la sphère unité $S \subset C(Q)$, telles que la droite $[0, p_0]$ soit parallèle à l'ensemble $F_1 \cap \cdots \cap F_n$ [5]). A son tour, le théorème ci-dessus de E. YA. RÉMÈS a l'interprétation géométrique suivante:

*Si les éléments $x_1, \ldots, x_n$ forment un système de Tchébychef, pour que $q \in G_n$ soit un polynôme de meilleure approximation de l'élément $x \in C(Q)$, il faut et il suffit que $q$ appartienne à au moins $n+1$ faces*

$$F_i = \{y \in C(Q) \mid \varepsilon_i[y(t_i) - x(t_i)] = \|q - x\|, \ \|y - x\| = \|q - x\|\}$$

*de la sphère de centre $x$ et de rayon $\|q - x\|$, où $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(\Delta\Delta_i)$ $(i = 1, \ldots, n+1)$.*

**3.** Le théorème 3. 1 implique le suivant critère de l'unicité du polynome de meilleure approximation:

*Pour que tout élément $x \in E$ ait un seul polynôme de meilleure approximation, il faut et il suffit qu'il n'existe pas $h \leqq n+1$ points extrêmes non opposés $f_1, \ldots, f_h$ de la sphère $S^*$ et une combinaison convexe $m = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_h f_h$ telle que 1° $m(x_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, 2° $m(x) = \|x\|$ pour du moins deux éléments différents $x \in E$, dont la différence appartient à $G_n$.*

On voit facilement que ce théorème est équivalent à un des théorèmes démontrés dans le travail [6] (théorème 2. 2, p. 127).

## Bibliographie.


[1] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории аппроксимации (Москва—Ленинград, 1947).

[2] Ахиезер, Н. И.—Крейн, М. Г., О некоторых вопросах теории моментов (Харьков, 1938).

[3] BANACH, S., *Théorie des opérations linéaires* (Warszawa, 1932).

[4] BERNSTEIN, S., *Leçons sur les propriétés extremales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle* (Paris, 1926).

[5] GHIKA, AL., Mulţimi extremale şi hiperplane de sprijin maximale, *Bul. Sti. Acad. R. P. R., Sect. Sti. Mat. Fiz.*, 7 (1955), 59—64.

[6] SINGER, I., Proprietăţi ale suprafeţei sferei unitate şi aplicaţii la rezolvarea problemei unicităţii polinomului de cea mai bună aproximaţie în spaţii Banach oarecare, *Studii şi Cercet. Mat.*, 8 (1956), 95—145.

[7] SINGER, I., Sur l'extension des fonctionnelles linéaires, *Revue de math. pures et appl.* I, 2 (1956), 99—106.

[8] Ремез, Е. Я., Про методи наукращого в розумінні Чебишова, наближенного представлення функцій (Київ, 1935).


*(Reçu le 22 octobre 1956.)*

[5]) Rappelons que, dans les espaces $C(Q)$, l'intersection d'un ensemble fini quelconque de faces de la sphère $S$ est toujours non-vide (v. [6], p. 131).

# Eine Bemerkung zur Jordanschen Normalform von Matrizen.

Von VLASTIMIL PTÁK in Prag.

**1.** Es ist die Aufgabe der vorliegenden Bemerkung zu zeigen, daß die Theorie der Dualität, die sich in der letzten Zeit als ein mächtiges Mittel zum Studium der unendlich-dimensionalen Vektorräume erwiesen hat, keineswegs in ihren Anwendungen auf dieses Gebiet beschränkt ist. Sie kann auch in der klassischen Theorie der Matrizen angewendet werden, um — wenn auch nicht neue Resultate — so vielmehr ein tieferes Verständnis der geometrischen Substanz und Vereinfachung der Beweise zu erzielen.

Es scheint uns nämlich, daß es nur auf der geometrischen Basis möglich ist, zu den wahren Gründen der Theorie der Normalformen von Matrizen durchzudringen. Wir wollen zeigen, daß die gleichzeitige Betrachtung des gegebenen Raumes und seines dualen Raumes ermöglicht, zu den beiden Hauptsätzen der Theorie der Normalformen fast triviale Beweise anzugeben, obwohl die übliche Behandlung dieser Resultate in den Lehrbüchern viel mehr Zeit erfordert.

Bezeichnungen. Es sollen zwei endlichdimensionale lineare Räume $X$ und $Y$ gegeben sein, die zueinander dual sind. Das Produkt der Vektoren $x \in X$ und $y \in Y$ soll nach BOURBAKI [1] mit $\langle x, y\rangle$ bezeichnet werden. Es sei $A$ eine lineare Abbildung von $X$ in sich selbst. Das Bild des Vektors $x$ soll mit $xA$ bezeichnet werden. Die konjugierte Abbildung $A^*$ wird in der üblichen Weise durch

$$\langle xA, y\rangle = \langle x, yA^*\rangle$$

definiert.

Ein Unterraum $X_0 \subset X$ heißt invariant bezüglich $A$, wenn $x_0 A \in X_0$ für jedes $x_0 \in X_0$ gilt. Es sei $M$ eine Untermenge von $X$. Die Menge aller $y \in Y$, für die $\langle M, y\rangle = 0$ gilt, werden wir den Annihilator von $M$ nennen. Der Annihilator einer beliebigen Menge ist stets ein linearer Unterraum von $Y$.

Wir werden uns auf die folgenden zwei wohlbekannten Tatsachen aus der Theorie der Dualität stützen. Die Beweise sind hinzugefügt, obwohl es sich um durchaus triviale Schlüße handelt.

(1, 1) *Es sei $Y_0$ ein Unterraum von $Y$, der invariant bezüglich $A^*$ ist. In diesem Falle ist der Annihilator von $Y_0$ invariant bezüglich $A$.*

Beweis. Es sei $x_0$ ein Element des Annihilators von $Y_0$. Wir sollen zeigen, daß auch $x_0 A$ zu diesem Annihilator gehört. Wir haben, da nach der Voraussetzung $Y_0 A^* \subset Y_0$ ist,

$$\langle x_0 A, Y_0 \rangle = \langle x_0, Y_0 A^* \rangle = 0,$$

womit der Beweis erbracht ist.

(1, 2) *Sind die Unterräume $X_0 \subset X$ und $Y_0 \subset Y$ zueinander dual, so bildet $X_0$ mit dem Annihilator von $Y_0$ eine direkte Zerlegung von $X$.*

Beweis. Der Annihilator von $Y_0$ soll mit $X_1$ bezeichnet werden. Ist nun $x \in X_0 \cap X_1$, so folgt aus $x \in X_1$, daß $\langle x, Y_0 \rangle = 0$. Da jedoch die Räume $X_0$ und $Y_0$ dual sind und $x \in X_0$ ist, so folgt $x = 0$. Wir haben also $X_0 \cap X_1 = (0)$. Aus der Dualität der Räume $X_0$ und $Y_0$ folgt $\dim X_0 = \dim Y_0$, weshalb $\dim X_1 = \dim X - \dim Y_0 = \dim X - \dim X_0$ ist. Es folgt $X = X_0 + X_1$, womit der Beweis beendet ist.

Die eben gewonnenen Resultate werden folgendermaßen verwendet. Soll man eine direkte Zerlegung $X = X_0 + X_1$ des gegebenen Raumes in zwei invariante Unterräume finden, so genügt es, zwei zueinander duale Unterräume $X_0 \subset X$ und $Y_0 \subset Y$ anzugeben derart, daß $X_0$ bezüglich $A$ und $Y_0$ bezüglich $A^*$ invariant ist. Bedeutet nun $X_1$ den Annihilator von $Y_0$, so ist $X_1$ invariant nach (1, 1) und bildet zusammen mit $X_0$ eine direkte Zerlegung von $X$ nach (1, 2).

**2.** Die „geometrische" Theorie der linearen Operatoren beruht auf den folgenden zwei Sätzen über direkte Zerlegungen des gegebenen Raumes in invariante Unterräume.

Satz 1. *Es gibt eine direkte Zerlegung $X = X_s + X_r$ in zwei (bezüglich $A$) invariante Unterräume derart, daß $A$ auf $X_s$ nilpotent, auf $X_r$ dagegen regulär ist.*

Satz 2. *Es sei $A^q = 0$ und $x_0$ ein Vektor, für den $x_0 A^{q-1} \neq 0$ ist. Es sei $X_0$ der kleinste invariante Unterraum, der $x_0$ enthält. Dann existiert ein invarianter Unterraum $X'$ derart, daß $X$ in die direkte Summe $X = X_0 + X'$ zerlegt werden kann.*

Bekanntlich (siehe z. B. [2]) enthalten diese zwei Sätze den einzigen wesentlichen Bestandteil der Theorie der Jordanschen Normalform, jedoch soll hier zur Bequemlichkeit des Lesers geschildert werden, wie man aus diesen zwei Sätzen das Resultat in der üblichen Form erhält. Der Beweis der Sätze 1, 2 erfolgt im Absatz 3.

Es sei also $X$ ein $n$-dimensionaler linearer Raum, $A$ ein linearer Operator in $X$. Unter einer Basis von $X$ verstehen wir eine geordnete Folge $B=(e_1,\ldots,e_n)$ von $n$ linear unabhängigen Elementen von $X$. Im dualen Raume $Y$ gibt es nun Vektoren $f_1,\ldots,f_n$ derart, daß $\langle e_i,f_j\rangle=\delta_{ij}$, wobei die rechte Seite das Kroneckersche Symbol ist. Diese Vektoren bilden die sogenannte duale Basis zu $B$. Die Matrix bestehend aus den Elementen

$$a_{ij}=\langle e_i A,f_j\rangle$$

wird die Matrix des Operators $A$ bezüglich der Basis $B$ genannt. Die geometrische Theorie der linearen Operatoren beruht bekanntlich darauf, daß man durch geeignete Wahl der Basis $B$ erzielt, daß die zugehörige Matrix zur möglichst einfachen Form gebracht wird.

Nehmen wir an, daß es uns gelungen ist, den Raum $X$ als direkte Summe $X=X_1\dotplus\cdots\dotplus X_p$ zu schreiben, wobei die einzelnen $X_i$ invariant bezüglich $A$ sind. Es sei $A_i$ der Teiloperator von $A$, betrachtet nur auf dem Raume $X_i$. Es sei $B_i$ eine Basis von $X_i$.

Die $B_i$ können nun zu einer Basis $B=(B_1,\ldots,B_p)$ des ganzen Raumes $X$ vereinigt werden. Es ist leicht einzusehen, daß in dieser Basis die Matrix des Operators $A$ die folgende einfache Form erhält:

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & M_p \end{pmatrix},$$

wo $M_i$ die Matrix des Operators $A_i$ bezüglich der Basis $B_i$ ist.

Es seien $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ die voneinander verschiedenen Eigenwerte von $A$.

Wir setzen $C_i=A-\lambda_i E$. Nach Satz 1 existiert eine direkte Zerlegung $X=X_{1s}\dotplus X_{1r}$ derart, daß $C_1$ nilpotent auf $X_{1s}$ und regulär auf $X_{1r}$ ist. Die Räume $X_{1s}$ und $X_{1r}$ sind dabei invariant bezüglich $C_1$, also auch bezüglich $A$, und es ist $X_{1s}\neq(0)$. Wird $A$ nur auf dem Raume $X_{1r}$ betrachtet, so gehört $\lambda_1$ nicht mehr zum Spektrum von $A$, da $A-\lambda_1 E$ regulär auf $X_{1r}$ ist. Ist nun $p>1$, so ist auch $X_{1r}\neq(0)$ und wir können wieder nach Satz 1 eine analoge direkte Zerlegung des Raumes $X_{1r}$ bezüglich $C_2$ bilden. Es ist also $X_{1r}=X_{2s}\dotplus X_{2r}$, wo $X_{2s}$ und $X_{2r}$ invariant bezüglich $C_2$ (also auch bezüglich $A$) sind, wobei $C_2$ nilpotent auf $X_{2s}$ und regulär auf $X_{2r}$ ist. Auf $X_{2r}$ ist sowohl $A-\lambda_1 E$ als auch $A-\lambda_2 E$ regulär, weshalb $\lambda_1$ und $\lambda_2$ nicht mehr zum Spektrum von $A$ auf $X_{2r}$ gehören. In ähnlicher weise erhält man die Zerlegung $X_{2r}=X_{3s}\dotplus X_{3r}$ zugehörig zum Operator $C_3$ usw. Bei jedem Schritte geht ein Eigenwert verloren, weshalb im $p$-ten Schritte $X_{pr}=(0)$ sein muß.

Der ganze Raum ist somit als direkte Summe

$$X = X_{1s} + X_{2s} + \cdots + X_{ps}$$

invarianter Unterräume dargestellt, wobei $C_i$ nilpotent auf $X_{is}$ ist. Der Bestandteil $A_i$ von $A$ auf $X_{is}$ erfüllt also eine Gleichung $A_i = \lambda_i E + N_i$, wo $N_i$ ein nilpotenter Operator auf $X_{is}$ ist.

Unsere Aufgabe ist somit auf die Untersuchung von nilpotenten Operatoren zurückgeführt. Es sei also $A$ ein nilpotenter Operator auf dem Raume $X$. Es sei $q_1$ die kleinste natürliche Zahl, für die $A^{q_1} = 0$ ist. Es gibt also ein $e_1 \in X$ derart, daß $e_1 A^{q_1-1} \neq 0$. Es folgt unmittelbar, daß die Vektoren $e_1, e_1 A, e_1 A^2, \ldots, e_1 A^{q_1-1}$ linear unabhängig sind und der von ihnen erzeugte Unterraum $X_1$ mit dem kleinsten invarianten Unterraum von $X$, der $e_1$ enthält, übereinstimmt. Die Matrix von $A$ auf $X_1$ bezüglich der Basis $(e_1, e_1 A, e_1 A^2, \ldots, e_1 A^{q_1-1})$ hat die folgende einfache Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 2 gibt es einen invarianten Unterraum $X_1'$ derart, daß $X$ in die direkte Summe $X_1 + X_1'$ zerlegt werden kann. Der Teiloperator $A_1$ von $A$, betrachtet auf $X_1'$, ist wieder nilpotent. Es sei $q_2$ die kleinste natürliche Zahl, für die $A_1^{q_2} = 0$. Man wählt wieder $e_2 \in X_1'$ so daß $e_2 A^{q_2-1} \neq 0$ und bezeichnet mit $X_2$ den kleinsten invarianten Unterraum von $X_1'$, der $e_2$ enthält. Nach Satz 2 bekommen wir eine weitere invariante Zerlegung $X_1' = X_2 + X_2'$. Dasselbe Verfahren wird nun auf $X_2'$ angewandt usw. Als Endresultat der beiden soeben beschriebenen Verfahren erhalten wir eine Basis, bezüglich der die Matrix von $A$ die klassische Jordansche Normalform erhält.

**3.** Wir führen jetzt die Beweise der Sätze 1, 2 an.

Beweis vom Satz 1. Es sei $X_r$ ($Y_r$) die Menge aller Vektoren $x \in X$ ($y \in Y$), die eine Gleichung $xA^i = 0$ ($yA^{*j} = 0$) für irgendein $i$ ($j$) erfüllen. Offensichtlich sind beide Mengen invariante Räume. Wir behaupten, daß $X_r$ und $Y_r$ dual sind. Wegen der Symmetrie genügt es, zu jedem $x \in X_r, x \neq 0$, ein $y \in Y_r$ zu finden derart, daß $\langle x, y \rangle \neq 0$ ist.

Es sei also ein $x \in X_r, x \neq 0$ gegeben. Es sei $q$ die kleinste natürliche Zahl mit $xA^q = 0$. Es gibt also ein $y_0 \in Y$ mit $\langle xA^{q-1}, y_0 \rangle \neq 0$. Die Elemente $y_0, y_0 A^*, y_0 A^{*2}, \ldots$ können nicht alle linear unabhängig sein. Es sei $p$ der kleinste Exponent, für den $y_0A^{*p}$ als Linearkombination der Elemente $y_0A^{*i}$ mit $i>p$ dargestellt werden kann. Es gibt also einen Vektor $z$ mit $y_0A^{*p}=zA^{*p+1}$. Wir behaupten, daß $p\geqq q$ ist. Sonst könnte man nämlich $y_0A^{*q-1}$ in der Form $vA^{*q}$ schreiben, was unmöglich ist, da $0\neq\langle xA^{q-1}, y_0\rangle=$ $=\langle x, y_0A^{*q-1}\rangle=\langle x, vA^{*q}\rangle=\langle xA^q, v\rangle=0$. Für $y=y_0A^{*q-1}-zA^{*q}$ haben wir $yA^{*p-q+1}=y_0A^{*p}-zA^{*p+1}=0$, also $y\in Y_r$. Ferner gilt

$$\langle x, y\rangle=\langle x, y_0A^{*q-1}\rangle=\langle xA^{q-1}, y_0\rangle\neq 0,$$

womit der Beweis erbracht wurde.

Beweis vom Satz 2. Es sei $y_0\in Y$ derart gewählt, daß $\langle x_0A^{q-1}, y_0\rangle\neq 0$ ist. Wir haben also $y_0A^{*q-1}\neq 0$, weshalb der kleinste invariante Unterraum $Y_0$ von $Y$, der $y_0$ enthält, die Dimension $q$ besitzt. Wir behaupten, daß $X_0$ und $Y_0$ dual sind. Es sei also $x\in X_0, x\neq 0$. Es ist $x=\alpha_0x_0+\alpha_1x_0A+$ $+\cdots+\alpha_{q-1}x_0A^{q-1}$. Es sei $\alpha_k$ der erste von Null verschiedene Koeffizient. Wir haben

$$\langle x, y_0A^{*q-1-k}\rangle=\langle xA^{q-1-k}, y_0\rangle=\langle \alpha_kx_0A^{q-1}, y_0\rangle\neq 0,$$

womit schon alles gezeigt ist.

## Literatur.

[1] N. Bourbaki, *Algèbre linéaire*, Actualités Scientifiques et Industrielles 1032 (Paris, 1947).
[2] A. Мальцев, Основы линейной алгебры (Moskau—Leningrad, 1948).

*(Eingegangen am 20. Juli 1955.)*

# Zu einer Spektralbetrachtung von Atkinson und Sz.-Nagy.

Von P. H. MÜLLER in Dresden.

**1.** In den Arbeiten [1] und [2] beweisen ATKINSON und SZ.-NAGY folgende Spektralaussage.

Es seien $V_1, \ldots, V_n$ vollstetige lineare Transformationen eines Banachraumes $R$ (Elemente $f, g$; 0 Nullelement) in sich; $I$ sei die identische Abbildung in $R$. Wir betrachten für komplexes $\lambda$ die Gleichung

$$(I + \lambda V_1 + \cdots + \lambda^n V_n) f = 0 \tag{1}$$

und nennen die Zahl $\lambda$ Eigenwert, falls (1) lösbar ist mit $f \neq 0$. Dann wird gezeigt: *die zu* (1) *gehörigen Eigenwerte $\lambda$ haben keinen endlichen Häufungspunkt.*

Diese Aussage findet sich auch enthalten in Arbeiten von GOCHBERG [3] und CHARASOW [4].

Im folgenden soll hierfür ein neuer Beweis gezeigt werden, der insofern berichtenswert erscheint, als es in kurzer und einfacher Weise möglich ist, bekannte Aussagen der RIESZ'schen Theorie, die für (1) im Spezialfall $n = 1$ gelten, auf unseren allgemeineren Gleichungstyp auszudehnen. Den Grundgedanken zu diesem Beweise liefert ein von WIELANDT bekanntes Vorgehen, die Eigenschaften der Tschirnhaus-Transformation zur Linearisierung der Aufgabenstellung (1) zu verwenden.

**2.** Zur Vorbereitung des Beweises stellen wir zunächst einige bekannte Tatsachen zusammen (vgl. hierzu z. B. [5], S. 126, 175, 316).

Wir bilden ausgehend von $R$ den Produktraum

$$\mathfrak{R} = \underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{n \text{ mal}}$$

mit den Elementen $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$, wobei $\mathfrak{f} = \{f^1, f^2, \ldots, f^n\}$, $f^i \in R$ ($\mathfrak{0} = \{0, 0, \ldots, 0\}$ Nullelement); $\mathfrak{J}$ sei die identische Abbildung in $\mathfrak{R}$. Durch Einführung einer geeigneten Metrik kann erreicht werden, daß $\mathfrak{R}$ wieder ein Banachraum wird, der sich als die direkte Summe aus den Räumen $R$ zusammensetzt.

Sind $T_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ lineare Abbildungen von $R$ in sich, so definieren die Relationen

$$g^i = \sum_{j=1}^{n} T_{ij} f^j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

die lineare Abbildung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{T}\mathfrak{f}$$

von $\mathfrak{R}$ in sich. Offenbar läßt sich $\mathfrak{T}$ in Form einer Matrix mit den Elementen $T_{ij}$ schreiben. $\mathfrak{T}$ stellt eine beschränkte (vollstetige) Abbildung in $\mathfrak{R}$ genau dann dar, wenn alle $T_{ij}$ beschränkt (vollstetig) in $R$ sind.

Sind $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ zwei lineare Abbildungen in $\mathfrak{R}$, zu denen die Matrizen mit den Elementen $S_{ij}$ bzw. $T_{ij}$ gehören, so gehört zur Produkt-Abbildung $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ die Matrix mit den Elementen $(ST)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} S_{ik} T_{kj}$

**3.** Wir definieren nun die in $\mathfrak{R}$ beschränkte Abbildung

$$\mathfrak{V} = \begin{pmatrix} O & I & O & O & \cdots & O & O \\ O & O & I & O & \cdots & O & O \\ O & O & O & I & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & O & O & \cdots & O & I \\ -V_n & -V_{n-1} & -V_{n-2} & -V_{n-3} & \cdots & -V_2 & -V_1 \end{pmatrix};$$

dabei bedeutet $O$ die Null-Abbildung in $R$.

Bildet man für eine natürliche Zahl $k \leqq n$ in der oben beschriebenen Weise $\mathfrak{V}^k$, so erkennt man leicht, daß die Elemente der $k$ letzten Zeilen in $\mathfrak{V}^k$ vollstetig sind, so daß also $\mathfrak{V}^n$ eine in $\mathfrak{R}$ vollstetige Abbildung ist. Daraus folgt aber bekanntlich (vgl. etwa [5], S. 330), daß für $\mathfrak{V}^n$ und auch schon für $\mathfrak{V}$ selbst die Aussagen der Riesz'schen Theorie gelten.

Im besonderen besteht also das von Null verschiedene Spektrum bezüglich der Gleichung

$$(\varkappa\mathfrak{J} - \mathfrak{V})\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \tag{2}$$

nur aus Eigenwerten, die sich höchstens gegen Null häufen können.

Nun errechnet man aus (2) unter Beachtung der Definition von $\mathfrak{V}$ für $\mathfrak{g} = \{g^1, g^2, \ldots, g^n\}$ unmittelbar die Beziehungen

$$\varkappa f^1 - f^2 = g^1,\ \varkappa f^2 - f^3 = g^2, \ldots, \varkappa f^{n-1} - f^n = g^{n-1},$$
$$V_n f^1 + V_{n-1} f^2 + \cdots + V_1 f^n + \varkappa f^n = g^n;$$

d. h. aber, $\mathfrak{g}$ ist Nullvektor in $\mathfrak{R}$ genau dann, wenn

$$f^2 = \varkappa f^1,\ f^3 = \varkappa f^2 = \varkappa^2 f^1, \ldots, f^n = \varkappa^{n-1} f^1,$$
$$\varkappa^n f^1 + \varkappa^{n-1} V_1 f^1 + \cdots + \varkappa V_{n-1} f^1 + V_n f^1 = 0$$

gilt. Das bedeutet schließlich, daß $(\varkappa\mathfrak{J}-\mathfrak{B})\mathfrak{f}=0$, $\mathfrak{f}\neq 0$ äquivalent ist zu

$$\varkappa^n f^1+\varkappa^{n-1}V_1 f^1+\cdots+\varkappa V_{n-1}f^1+V_n f^1=0,\ f^1\neq 0.$$

Setzt man noch $\lambda=\frac{1}{\varkappa}$ $(\varkappa\neq 0)$, so ergibt sich der zu beweisende Satz.

## Literatur.

[1] F. V. Atkinson, A spectral problem for completely continuous operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, 3 (1952), 53—60.

[2] B. Sz.-Nagy, On a spectral problem of Atkinson, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, 3 (1952), 61—66.

[3] И. Ц. Гохберг, О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра, Доклады Акад. Наук СССР, **78** (1951), 629—632.

[4] Д. Ф. Харазов, К теории линейных уравнений в пространствах Банаха, Труды Тбил. Мат. Ун-та, **19** (1953), 163—171.

[5] A. C. Zaanen, *Linear Analysis* (Amsterdam, 1953).

(*Eingegangen am 1. Oktober 1956.*)

# Äquivalenz der Sätze von Kronecker—Hensel und von Szekeres für die Ideale des Polynomringes einer Unbestimmten über einem kommutativen Hauptidealring mit Primzerlegung.

Von LADISLAUS RÉDEI in Szeged.

Es ist ein wichtiges, bisher in wenigen Fällen gelöstes Problem, daß man die sämtlichen verschiedenen Ideale eines Ringes angibt. Das kann z. B. so geschehen, daß man zu jedem Ideal des Ringes ein Erzeugendensystem eindeutig bestimmt. Auf diese Weise wurde das Problem für den Polynomring $R[x]$ über einem kommutativen Hauptidealring $R$ mit Primzerlegung von KRONECKER—HENSEL [1] [1]) gelöst. Diese haben in der Wahrheit nur den Spezialfall betrachtet, daß $R$ der Ring der ganzen Zahlen ist, aber ihr Satz gilt samt Beweis auch für den gesagten allgemeinen Fall. Trotz der Wichtigkeit dieses Satzes scheint er in der „neuen" Algebra seinen gebührenden Platz nicht eingenommen zu haben, was zum großen Teil wohl dem Umstand zuzuschreiben ist, daß die Verfasser bei ihren Betrachtungen sich der (auch schon zurzeit etwas unmodernen) Sprache der „Modulsysteme" bedient haben. So war der Satz wohl auch Herrn SZEKERES unbekannt gewesen, als er für das Problem vor einigen Jahren eine neue Lösung veröffentlicht hatte; siehe SZEKERES [2]. Der Satz von SZEKERES lautet anders als der von KRONECKER—HENSEL. Beide Sätze verhalten sich zueinander so: Der Satz von SZEKERES ist kürzer gefaßt und somit eleganter, auch der Beweis ist einfacher, dagegen ist der Satz von KRONECKER—HENSEL mehr bis in die Einzelheiten ausgearbeitet, weshalb er für die Anwendungen mehr geeignet zu sein scheint.

Es wird sich zeigen, das der Satz von SZEKERES sich leicht in den von KRONECKER—HENSEL umformen läßt. Auf diesem Wege entsteht aus dem vorigen ein Beweis für den letzteren, der leichter ist als der ursprüngliche.[2])

Wir wählen irgendwie ein Repräsentantensystem $\mathfrak{R}$ der Klassen der von 0 verschiedenen assozierten Elemente von $R$ fest, schreiben aber vor, $\mathfrak{R}$ daß

[1]) Mit [ ] verweisen wir auf das Literaturverzeichnis am Schluß unserer Arbeit.

[2]) Eine der heutigen Sprache der Algebra angepaßte Ausarbeitung des Kronecker—Henselschen Beweises findet sich bei RÉDEI [3].

das Einselement 1 von R enthält. (Das bedeutet, daß die Klasse der Einheiten durch 1 repräsentiert wird.) Ferner wählen wir für jedes Element $\varrho (\in \mathfrak{R})$ ein Repräsentantensystem $\mathfrak{R}(\varrho)$ der Restklassen mod $\varrho$ irgendwie fest, schreiben aber vor, daß jedes $\mathfrak{R}(\varrho)$ die 0 enthält.

Eine erste Übersicht über die Ideale von $R[x]$ läßt sich folgenderweise gewinnen. (Das Nullideal lassen wir durchweg außer Acht.) Jedes Ideal von $R[x]$ läßt sich eindeutig als ein Produkt $f(x)\mathfrak{a}$ schreiben, wobei $f(x)$ in $R[x]$ und der Anfangskoeffizient von $f(x)$ in $\mathfrak{R}$ gehört, ferner $\mathfrak{a}$ ein *primitives* Ideal in $R[x]$ ist, dessen Elemente nämlich relativ prim sind.

Der Satz von SZEKERES [9] S. 385 lautet so:

Man gebe endlich viele Elemente[3])

(1) $$\varrho_1, \ldots, \varrho_m (\in \mathfrak{R}) \qquad (m \geqq 0; \quad \varrho_m \neq 1)$$

und zu jedem $\varrho_k$ weitere $k$ Elemente

(2) $$\varrho_{ki} (\in \mathfrak{R}(\varrho_k)) \qquad (i = 0, \ldots, k-1; \quad k = 1, \ldots, m)$$

an. Dann werden durch die rekursive Definition

(3) $$g_0(x) = \varrho_1 \ldots \varrho_m, \quad \varrho_k g_k(x) = x g_{k-1}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} \varrho_{ki} g_i(x) \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

lauter Polynome $g_0(x), \ldots, g_m(x)$ in $R[x]$ angegeben. Dabei ist $g_k(x)$ vom Grade $k$ und von der Form

(4) $$g_k(x) = \varrho_{k+1} \ldots \varrho_m (x^k + \ldots) \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

Die zu den verschiedenen Systemen (1), (2) gehörenden

(5) $$\mathfrak{a} = (g_0(x), \ldots, g_m(x))$$

sind eben die sämtlichen verschiedenen primitiven Ideale von $R[x]$.

Bemerkung. Im Fall $m = 0$ soll $g_0(x) = \varrho_1 \ldots \varrho_m = 1$ verstanden werden, weshalb dann (5) in $\mathfrak{a} = R[x]$ übergeht. Es ist eine leichte Folgerung des Satzes, daß der Anfangskoeffizient $\varrho_{k+1} \ldots \varrho_m$ von $g_k(x)$ der größte gemeinsame Teiler der Anfangskoeffizienten aller Polynome in $\mathfrak{a}$ vom Gerade $k$ ist. Offenbar ist dann $m$ das Minimum der Gradzahlen aller Hauptpolynome in $\mathfrak{a}$; Hauptpolynom heißt ein Polynom mit dem Anfangskoeffizienten 1.

Um nun obigen Satz umzuformen betrachten wir die von 1 verschiedenen Glieder der Folge (1). Ihre Indizes bilden eine Folge

(6) $$n_1 < n_2 < \cdots < n_r (= m) \qquad (r \geqq 1).$$

Man verwende für die betrachteten Glieder von (1) die kürzere Bezeichnung

(7) $$\varrho_{n_i} = \sigma_i \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

[3]) Im fall $m = 0$ bedeutet (1) das leere System, weshalb die Bedingung $\varrho_m \neq 1$ nur im Fall $m > 0$ in Kraft tritt. Bei SZEKERES [2] fehlt die Bedingung $\varrho_m \neq 1$, was ein offenbares Versehen ist.

und setze

(8) $$F_i(x) = g_{n_i}(x) \qquad (i = 0, \dots, r; \quad n_0 = 0).$$

Insbesondere gilt nach $(3_1)$ $F_0(x) = \varrho_1 \dots \varrho_m$, also

(9) $$F_0(x) = \sigma_1 \dots \sigma_r.$$

Betrachten wir ein von allen $n_i$ verschiedenes $k(=1, \dots, m)$. Für dieses gilt $\varrho_k = 1$, weshalb $\Re(\varrho_k)$ das einzige Element 0 hat. Hieraus folgt nach (2) $\varrho_{ki} = 0$ $(i = 0, \dots, k-1)$. Dies ergibt nach $(3_2)$ durch Induktion

(10) $$g_i(x) = x^{i-n_j} g_{n_j}(x) = x^{i-n_j} F_j(x) \qquad (n_j \leqq i < n_{j+1}; \quad j = 0, \dots, r-1),$$

wobei wir auch (8) berücksichtigt haben. Da nach (6) und (8) insbesondere $g_m(x) = F_r(x)$ ist, so folgt aus (5) und (10):

(12) $$\mathfrak{a} = (F_0(x), \dots, F_r(x)).$$

Ferner läßt sich $(3_2)$ für $k = n_1, \dots, n_r$ wegen (7), (8) und (10) in der Form

$$\sigma_{l+1} F_{l+1}(x) = x^{n_{l+1}-n_l} F_l(x) + \sum_{i=0}^{n_{l+1}-1} \varrho_{n_{l+1} i} g_i(x) \qquad (l = 0, \dots, r-1)$$

schreiben. Wegen (10) ergibt sich hieraus nach leichter Umformung:

$$\sigma_{l+1} F_{l+1}(x) = x^{n_{l+1}-n_l} F_l(x) + \sum_{k=0}^{l} F_k(x) \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} \varrho_{n_{l+1} i} x^{i-n_k} \qquad (l = 0, \dots, r-1).$$

Die innere Summe ist ein Polynom $g_{kl}(x)$ vom Grade $< n_{k+1} - n_k$, dessen Koeffizienten nach (2) und (7) aus $\Re(\sigma_{l+1})$ genommen sind. Hiernach gilt

$$\sigma_{l+1} F_{l+1}(x) = (x^{n_{l+1}-n_l} + g_{ll}(x)) F_l(x) + \sum_{k=0}^{l-1} g_{kl}(x) F_k(x) \qquad (l = 0, \dots, r-1).$$

Schreibt man noch $f_{k+1\, l+1}(x)$ statt $g_{kl}$, so erscheint endlich der Satz von SZEKERES in folgender Form:

Man gebe *erstens* ganze Zahlen

(13) $$0 = n_0 < n_1 < \dots < n_r \qquad (r \geqq 0),$$

*zweitens* Elemente

(14) $$\sigma_1, \dots \sigma_r (\in \Re),$$

*drittens* Polynome

(15) $$f_{kl}(x) \qquad (1 \leqq k \leqq l \leqq r)$$

mit Koeffizienten aus $\Re(\varrho_l)$ und vom Grade $< n_k - n_{k-1}$ an und bestimme die Polynome $F_0(x), \ldots, F_r(x)$ rekursiv aus den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
F_0(x) &= \sigma_1 \ldots \sigma_r, \\
\sigma_1 F_1(x) &= (x^{n_1} + f_{11}(x)) F_0(x), \\
\sigma_2 F_2(x) &= \quad f_{12}(x) F_0(x) + (x^{n_2-n_1} + f_{22}(x)) F_1(x), \\
&\vdots \\
\sigma_r F_r(x) &= \quad f_{1r}(x) F_0(x) + f_{2r}(x) F_1(x) + \cdots + (x^{n_r-n_{r-1}} + f_{rr}(x)) F_{r-1}(x).
\end{aligned} \tag{16}
$$

Diese $F_i(x)$ liegen in $R[x]$. Die zu den Systemen (13), (14), (15) gehörenden

$$\mathfrak{a} = (F_0(x), \ldots, F_r(x)) \tag{17}$$

sind eben die sämtlichen verschiedenen Ideale von $R[x]$.

B e m e r k u n g. Dies ist der Satz von KRONECKER—HENSEL [1] in verallgemeinerter Form. KRONECKER—HENSEL bewiesen nämlich den Satz nur für primäre primitive Ideale $\mathfrak{a}$, d. h. für den Fall, daß $F_0(x) = \varrho_1 \ldots \varrho_r$ die Potenz eines Primelementes von R ist. Im Prinzip genügt das, da die primitiven Ideale von R$[x]$ sich eindeutig als Produkt (oder Durchschnitt) von primären Idealen erzeugen lassen, trotzdem kann oft auch obige verallgemeinerte Form des Satzes vom Vorteil sein. Die weitere Verallgemeinerung besteht darin, wie gesagt, daß bei KRONECKER—HENSEL nur der Ring der ganzen Zahlen statt eines beliebigen Euklidischen Ringes R betrachtet wird. (In diesem Spezialfall kann natürlich für R die Menge der positiven ganzen Zahlen und für $\mathfrak{R}(a)$ $(a \in \mathfrak{R})$ das Restsystem $0, \ldots, a-1 \bmod a$ genommen werden.) Es soll betont werden, daß wohl beide Sätze, nämlich der von KRONECKER—HENSEL und der von SZEKERES, sehr einfach alle verschiedenen Ideale von R$[x]$ bestimmen, daß aber es sich in ihnen wegen der willkürlichen Wahl von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}(\varrho)$ um keine invariante Bestimmung handelt. (Absolute Invarianten sind die Zahlen $n_1, \ldots, n_r$ (in (13).) Man bemerke auch, daß (17) im allgemeinen keine „kürzeste Darstellung“ von $\mathfrak{a}$ ist. Z. B. betrachten wir nämlich das durch zwei Elemente erzeugte Ideal $\mathfrak{a} = (x^5, x^3 - p^3)$, wobei jetzt R der Ring der ganzen Zahlen und $p$ eine Primzahl ist. Man sieht leicht, daß jetzt (17) als $\mathfrak{a} = (x^3 - p^3, p^3x^2, p^6)$ lautet, wobei drei Erzeugende auftreten. Diese „Abundanz“ der Darstellung (17) ist aber gegenüber ihrer Eleganz kein ernster Nachteil. Man bemerke noch, daß sich (16) mit Hilfe von Matrizen auch so schreiben läßt:

$$F_0(x) = \sigma_1 \ldots \sigma_r,$$

$$
\begin{pmatrix} \sigma_1 F_1(x) \\ \vdots \\ \sigma_r F_r(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{n_1} + f_{11}(x) & & & 0 \\ f_{12}(x) & x^{n_2-n_1} + f_{22}(x) & & \\ \vdots & & & \\ f_{1r}(x) & f_{2r}(x) & \ldots & x^{n_r-n_{r-1}} + f_{rr}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0(x) \\ \vdots \\ F_{r-1}(x) \end{pmatrix}. \tag{17}
$$

Im ersten Faktor auf der rechten Seite der zweiten Gleichung haben die Polynome $f_{kl}(x)$ in der $k$-ten Zeile einen Grad $< n_k - n_{k-1}$, die in der $l$-ten Spalte haben lauter Koeffizienten aus $\mathfrak{R}(\varrho_l)$.

## Literaturverzeichnis.

[1] KRONECKER—HENSEL, *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig, 1901).

[2] SZEKERES, G., A canonical basis for the ideals of a polynomial domain, *Amer. Math. Monthly*, 59 (1952), 379—386.

[3] RÉDEI L., *Algebra* I (Budapest, 1954).

*(Eingegangen am 10. Dezember 1956.)*

# The von Neumann coordinatization theorem for complemented modular lattices.

By K. D. FRYER and I. HALPERIN[1]) in Kingston (Canada).

## 1. Introduction.

**1. 1.** In all of what follows $n$ will denote a fixed positive integer, $V$ will denote the set of all vectors $u=(\alpha^1,\dots,\alpha^n)$ of length $n$, and left modules will always mean *non-empty* left modules of $V$. The coordinates $\alpha^i$ will be arbitrary elements in a ring $\mathfrak{R}$.

If $\mathfrak{R}$ is a division ring it is well known that the set of all left modules of $V$ form a complemented modular lattice. If $\mathfrak{R}$, more generally, is a regular ring with unit element, then, as discovered by JOHN VON NEUMANN, a complemented modular lattice is formed by all left modules *of finite span* (a left module is of finite span if it is spanned by a finite number of vectors). In the case that $\mathfrak{R}$ is a division ring *every* left module is of finite span.

A deep converse to the previous statements was discovered by VON NEUMANN [7, vol. 23, page 18; 8, vol. II, Theorem 14.1, page 141]. Let $L$ be a complemented modular lattice possessing a finite homogeneous basis $a_1,\dots,a_n$ of order $n$ and let $L_{ij}$ denote the set of inverses of $a_j$ with respect to $a_i+a_j$. VON NEUMANN showed that if $n\geqq 4$ the following theorem holds:

T h e v o n N e u m a n n c o o r d i n a t i z a t i o n t h e o r e m. *For every $i\neq j$, addition and multiplication can be defined for the elements of $L_{ij}$ in such a way that:*

(i) *the $L_{ij}$ become regular rings with unit, isomorphic to a common regular ring $\mathfrak{R}$,*

(ii) *all sub-lattices $L(a_i)$ ($L(a_i)$ consists of all $x\leqq a_i$) are isomorphic to the lattice of all left principal ideals of $\mathfrak{R}$,*

(iii) *$L$ is isomorphic to (coordinatized by) the lattice of all left modules of finite span in the space $V$ of vectors $(\alpha^1,\dots,\alpha^n)$ with all $\alpha^i$ in $\mathfrak{R}$.*

---

[1]) Canadian Government Overseas-Award Fellow 1954—55.

This generalizes the classical theorem that a projective geometry can be coordinatized (with coordinates in a suitable division ring) if the geometry has dimension $\geqq 3$ (that is, has order $\geqq 4$). But the classical theorem also asserts that a projective geometry of dimension 2 (i. e. a plane geometry) can be so coordinatized if and only if DESARGUES's theorem holds [3, Kap. V; 6, Theorems 10, 11, ex. 19, page 204] and this result is not covered by VON NEUMANN's theorem as formulated hitherto.

In this paper we will give a presentation of VON NEUMANN's coordinatization theorem which further simplifies our previous treatment [1, 2] and which includes the case of plane projective geometry. Our discussion will apply to any complemented modular lattice $L$ possessing a homogeneous basis of order $\geqq 3$; for the case $n=3$, we postulate the additional restrictions (4. 3. 3), (4. 3. 4) and (4. 10. 3). When $L$ is a plane projective geometry these restrictions reduce to the so-called fundamental theorem on quadrangular sets [6, p. 47], which is, in turn, equivalent to DESARGUES's theorem.

Since detailed discussions of the von Neumann coordinatization theorem which have appeared previously [8, vol. II; 4; 1, 2] are not readily accessible, we find it desirable to give here a complete exposition.

**1. 2. Contents of this paper.** This paper does not assume previous knowledge of either VON NEUMANN's theory or general lattice theory. Sections 2, 3 and part of 4 are a simplified exposition of parts of [8, vols I, II].

In section 2 definitions are given for: lattice with zero element, modular lattice, relatively complemented lattice, complemented lattice and independence of a collection of lattice elements, together with some properties which are required later and are easily verified.

In section 3 regular semi-groups and regular rings are defined and some of their properties obtained. With $V$ denoting the module of all vectors of length $n$ with coordinates in a regular ring it is shown that a left module (i. e. sub-module of $V$) of finite span is always spanned by $n$ vectors $(\alpha^{j1},\ldots,\alpha^{jn})$, $j=1,\ldots,n$, with the properties: for each $j$, $\alpha^{jj}$ is idempotent, $=e^j$, say; for all $i>j$, $\alpha^{ji}=0$; for all $i<j$, $e^j\alpha^{ji}=\alpha^{ji}$ and $\alpha^{ji}e^i=0$. Such a set of $n$ vectors will be called a *canonical basis* for the left module. It is shown that the left modules of finite span form a relatively complemented modular lattice; if the regular ring $\mathfrak{R}$ has a unit then this lattice is complemented.

In section 4 a ring of coordinates is constructed for a given complemented modular lattice $L$. In § 4. 1 homogeneous bases and normalized frames for $L$ are defined. Addition and multiplication are defined in §§ 4. 2 and 4. 9 respectively, for elements in a fixed $L_{ij}$ (this is a lattice generalization of familiar constructions in projective geometry). In §§ 4. 2 to 4. 14

it is shown that the $L_{ij}$ then become isomorphic regular rings with unit if $L$ possesses a homogeneous basis of order $n \geqq 3$ and satisfies the additional restrictions (4. 3. 3), (4. 3. 4) and (4. 10. 3). Assuming these conditions on $L$, Parts (i) and (ii) of the von Neumann coordinatization theorem are established (Theorem (4. 14. 6)).

In § 4. 15 certain collections of lattice elements $(x_{ij};\ i \neq j)$, $(x_{ij};\ i > j)$ with all $x_{ij}$ in $L_{ij}$, are called $L$-numbers and upper semi-$L$-numbers respectively. These numbers form rings $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}$, respectively, and $\mathfrak{R}'$ is identified in a natural way with a subring of $\mathfrak{R}$ (actually $\mathfrak{R}'$ coincides with $\mathfrak{R}$; this is shown directly if $n \geqq 4$ but for $n = 3$ is obtained only as a *consequence* of Part (iii) of the coordinatization theorem). $\mathfrak{R}$ is called an auxiliary ring for $L$. In (4. 15. 5) $\mathfrak{R}$ is shown to be ring-isomorphic to every $L_{ij}$. The proof of Part (iii) of the coordinatization theorem (to be given in sections 5, 6) is in terms of the space $V$ of vectors $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ with $\alpha^i$ in the auxiliary ring $\mathfrak{R}$.

In section 6 we give a rule which assigns to each $x$ in $L$ a family of modules of $V$. It is shown that all left modules assigned by this rule to the same $x$ coincide (Theorem (6. 2. 5)) and that the rule sets up a (1, 1) order preserving correspondence (i. e., lattice isomorphism) between $L$ and the set of all left modules of finite span (Theorems (6. 2. 1), (6. 2. 6) and (6. 2. 7)). This establishes Part (iii) of the coordinatization theorem.

The rule which assigns left modules to an element $x$ is as follows. First we consider special elements $y$ which satisfy: for some integer $i$, $y \leqq a_1 + \ldots + a_i$, $y(a_1 + \ldots + a_{i-1}) = 0$ (such an element is called an $i$-element). We show that every $i$-element can be expressed in terms of suitable „projections“ $\beta^i_{ij}$, $j < i$ (each $\beta^i_{ij}$ in $L_{ij}$), together with a suitable „covering“ idempotent $e$ (see (6. 1. 1)). In § 6. 2 we assign to each $i$-element $y$ a vector $u(y)$, not necessarily unique. Then an arbitrary $x$ is expressed as a sum $x_1 + \ldots + x_n$ with each $x_i$ (not necessarily unique) an $i$-element. The module spanned by vectors $u(x_1), \ldots, u(x_n)$ is assigned by our rule to $x$.

Certain relations required in the proofs of section 6 are collected together in the previous section 5. The involved identity (5. 2. 3) is required in the proof of Theorem (6. 2. 3). In § 5. 3 the nullity $\alpha^0 = (\alpha^0_i;\ i = 1, \ldots, n)$ and the reach $\alpha^r = (\alpha^r_i;\ i = 1, \ldots, n)$ with $0 \leqq \alpha^0_i, \alpha^r_i \leqq a_i$, are defined for each $\alpha$ in $\mathfrak{R}$. If $\mathfrak{R}$ is a division ring, each of $\alpha^0_i = 0$, $\alpha^r_i = a_i$ is equivalent to $\alpha \neq 0$; in the general $\mathfrak{R}$, these conditions are equivalent to: $\alpha$ has a right inverse and $\alpha$ has a left inverse, respectively. Theorems (5. 3. 1) to (5. 3. 7) give properties of reach and nullity and are designed to meet complications which arise in section 6 due to the fact that $\mathfrak{R}$ need not be a division ring.

Section 7 specializes the previous discussion to the case of projective geometry with a normalized frame consisting of points. It is shown that the additional restrictions (4.3.3), (4.3.4) and (4.10.3) are then equivalent to a restricted formulation (7.4.3) of DESARGUES's theorem.

**1.3. Notation.** Greek letters $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ (but excluding $\pi$) *without subscripts* will denote elements in a semi-group $S$ or in a ring $\Re$; *$e, f, g$ will be reserved for ring elements which are idempotent.* For fixed $\alpha^1, \alpha^2, \ldots$ in $\Re$, $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots)_l$ will denote the left ideal consisting of all finite sums $\beta^1\alpha^1 + \beta^2\alpha^2 + \ldots$ with arbitrary $\beta^i$ in $\Re$; similarly $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots)_r$ will denote the right ideal of elements $\alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2 + \ldots$; if $\alpha$ is in a semi-group $S$, $(\alpha)_l$ will denote the left coset consisting of all $\beta\alpha$ with arbitrary $\beta$ in $S$, $(\alpha)_r$ will denote the right coset consisting of all $\alpha\beta$ with arbitrary $\beta$ in $S$ (if the semi-group $S$ is the multiplicative semi-group of a ring $\Re$, the left coset $(\alpha)_l$ and the left ideal $(\alpha)_l$ coincide as do the right coset and right ideal $(\alpha)_r$). The letters $u, v, \ldots$ will denote vectors of length $n$ with coordinates in $\Re$ and $(u, v, \ldots)_l$ will denote the left module spanned by $u, v, \ldots$ which consists of all finite sums $\alpha u + \beta v + \ldots$ with arbitrary $\alpha, \beta, \ldots$ in $\Re$. The letters $a, b, c, d, \ldots, x, y, z, \ldots, p, q, w, \ldots, A, B, \ldots$ will denote elements in a lattice $L$. The letters $i, j, k, m, s, t$, will denote positive integers. The same symbols 0, 1 will be used to denote ring elements and lattice elements but there will be no ambiguity. The symbols $+$, $\Sigma$ will denote addition for ring elements and lattice join (i. e. supremum) for lattice elements but there will be no ambiguity. Similarly $\alpha\beta$ and $\Pi_j \alpha^j$ will denote ring multiplication whereas $xy$ and $\Pi_j x^j$ will denote lattice meet (i. e. infimum). With each ring element $\alpha$ there will be associated certain lattice elements to be denoted by $\alpha$ with *subscripts* (with or without superscripts) thus $\alpha_{ij}$, $\alpha_i^0$, and $\alpha_j^r$. For certain lattice elements we will define in §§ 4.3, 4.10 new operations $x \dot{+} y$, $x \times y$ with values which are again lattice elements; *these should not be confused with the lattice operations $x+y$, $xy$.*

## 2. Complemented modular lattices.

**2.1. Lattices.** A lattice with zero $L$ is a collection of elements $0, a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$, partially ordered by a relation $a \leqq b$ (also written $b \geqq a$) such that $0 \leqq x$ for every $x$, and for each pair $a, b$ there are elements $a+b$ and $ab$ (necessarily unique) satisfying:

$$a+b \leqq x \quad \text{if and only if} \quad a \leqq x \text{ and } b \leqq x,$$
$$x \leqq ab \quad \text{if and only if} \quad x \leqq a \text{ and } x \leqq b.$$

$L(a)$ will denote the sub-lattice with zero of all $x \leqq a$.

**2. 2. Modular lattices.** $L$ is called a modular lattice if: $a(b+c)=b+ac$ for all $a, b, c$ with $b \leqq a$. This *modular law* implies the *absorption law*: $ab+c=a(b+c)$ for all $a, b, c$, with $c \leqq a$; the *clipping identity*: $a(b+c)=a[b(a+c)+c]$ for all $a, b, c$; and the *superfluous term identities*: $ab=a(b+c)$ if $c(a+b)=0$ and $b=bd$ if $b \leqq d$. Applications of these identities will be indicated by (ML), (AL), (CI) and (ST), respectively.

**2. 3. Independence.** In a modular lattice with zero, for each $m=1,2,\ldots,$ elements $x^1,\ldots,x^m$ are called independent if, for each $i \leqq m$, $x^i(x^1+\cdots+x^{i-1}+x^{i+1}+\cdots+x^m)=0$. If for some ordering of the $x^i$ it is true that $x^j(x^1+\cdots+x^{j-1})=0$ for $2 \leqq j \leqq m$ then the $x^i$ are necessarily independent. If the $x^i$ are independent and for each of a finite number of $j$, $I_j$ is a subset of the integers $1,2,\ldots,m$, then

$$\Pi_j(\Sigma x^i;\ i \text{ in } I_j)=(\Sigma x^i;\ i \text{ in all } I_j);$$

if the $x^i$ are independent and $x^{ij} \leqq x^i$ for each of a finite number of $j$, then

$$\Pi_j \Sigma_i x^{ij}=\Sigma_i \Pi_j x^{ij}.$$

The symbols $\oplus, \Sigma\oplus$ will sometimes be used in place of $+, \Sigma$ to imply independence of the elements involved.

A detailed treatment of this theory of independence was given by von Neumann [7, vol. 23, page 22, footnote 7; 8, vol. I].

**2. 4. Complements and relative complements.** If $x \leqq z$ in a lattice $L$ with zero then a relative complement, or inverse, of $x$ in $z$ is an element $y$ (not necessarily unique) such that $x \oplus y=z$; $[z-x]$ will be used to denote such an inverse of $x$ in $z$. A lattice $L$ with zero is called *relatively complemented* if there exists at least one relative complement of $x$ in $z$ whenever $x \leqq z$.

A lattice $L$ is said to have a unit 1 (necessarily unique) if $x \leqq 1$ for all $x$ in $L$. If $L$ has zero and unit elements then a relative complement of $x$ in 1 is also called a complement of $x$; $L$ is called *complemented* if each $x$ has at least one complement.

A relatively complemented lattice with unit is obviously complemented; on the other hand, a complemented *modular* lattice is also relatively complemented (indeed, if $x \leqq z$ and $y$ is a complement of $x$ then $yz$ is a relative complement of $x$ in $z$).

The modular law implies the *indivisibility of inverses*, which asserts: *whenever $y_1$ and $y_2$ are both inverses of $a$ in $b$ and $y_1 \leqq y_2$, then $y_1=y_2$* (for $y_2=y_2b=y_2(y_1+a)=y_1+y_2a=y_1$). Because of this indivisibility of inverses it is possible to replace „points“ as used in certain constructions in the classical theory of projective geometry, by „inverses". We shall use the phrase *general indivisibility of inverses* to refer to the more general theorem (also a consequence of the modular law): *if* $y_1+a=y_2+a$ *and* $y_1a=y_2a$ *for some* $a$, *and* $y_1\leqq y_2$, *then* $y_1=y_2$.

**2. 5. Perspectivities.** Elements $x^1$ and $x^2$ in a lattice with zero are called perspective if they possess a common inverse in $x^1+x^2$. Any such common inverse $b$ is called an axis of perspectivity and, if the lattice is modular, sets up a (1, 1) order preserving mapping (called a perspective mapping) of $L(x^1)$ onto $L(x^2)$:

$$\text{if}\quad z^1\leqq x^1,\quad \text{then}\quad z^1\rightarrow(z^1+b)x^2,$$
$$\text{if}\quad z^2\leqq x^2,\quad \text{then}\quad z^2\rightarrow(z^2+b)x^1.$$

If $z^1$ and $z^2$ correspond under this mapping then $z^1+b=z^2+b$.

## 3. Regular rings.

**3. 1. Definition of regular semi-group and regular ring.** A non-empty system $S$ of elements $\alpha, \beta, \ldots$ is called a *semi-group* if an associative multiplication is defined on $S$, i. e. $\alpha\beta$ is defined and is in $S$ whenever $\alpha, \beta$ are in $S$ and $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$. The multiplication is called a *regular multiplication* and $S$ is called a *regular semi-group* if, for each $\alpha$ in $S$, $\alpha\beta\alpha=\alpha$ for at least one $\beta$ in $S$ [7, vol. 22, page 708].

It is easy to see that a semi-group $S$ is regular if and only if for each $\alpha$ there exists an idempotent $e$ (that is $ee=e$) such that $e\alpha=\alpha$ and $\alpha\beta=e$ for some $\beta$ (if $\alpha\beta\alpha=\alpha$, then choose $e=\alpha\beta$); similarly a semi-group $S$ is regular if and only if for each $\alpha$ there exists an idempotent $f$ such that $\alpha f=\alpha$ and $\beta\alpha=f$ for some $\beta$ (if $\alpha\beta\alpha=\alpha$, then choose $f=\beta\alpha$).

It is also easy to see that a semi-group $S$ is regular if and only if each left coset $(\alpha)_l$ contains $\alpha$ and is identical with $(e)_l$ for some idempotent $e$ and if and only if each right coset $(\alpha)_r$ contains $\alpha$ and is identical with $(f)_r$ for some idempotent $f$.

A ring $\mathfrak{R}$ (a unit is *not* assumed) is called a *regular ring* if its multiplication is regular; that is, for each $\alpha, \alpha\beta\alpha=\alpha$ for some $\beta$ in $\mathfrak{R}$.

**3. 2. Principal left ideals.** (Throughout this paper, right and left may obviously be interchanged). In a regular ring the principal left ideals form, as we shall show, a relatively complemented modular lattice with zero (complemented, if $\mathfrak{R}$ has a unit) when partially ordered by inclusion; the zero (left principal ideal) of this lattice consists of the zero element of $\mathfrak{R}$ only.

This is easily verified since, if $e, f$ are idempotents[2]):

(i) the smallest left ideal containing $(e)_l$ and $(f)_l$ is precisely $(e+g)_l$ where $g$ is any idempotent with $(g)_l = (f-fe)_l$;

(ii) the left ideal of all ring elements common to $(e)_l$ and $(f)_l$ is precisely $(f-gf)_l$ where $g$ is any idempotent with $(g)_r = (f-fe)_r$;

(iii) $(f-fe)_l$ is a relative complement of $(e)_l$ in $(f)_l$ whenever $(e)_l$ is contained in $(f)_l$;

(iv) if $\mathfrak{R}$ has a unit 1 then $(1)_l \geqq (e)_l$.

It is now easy to prove that: a ring $\mathfrak{R}$ is regular if and only if its principal left ideals form a relatively complemented modular lattice such that every principal left ideal $(\alpha)_l$ contains $\alpha$ and is *contained* in some principal left ideal $(e)_l$ with $e$ idempotent (possibly depending on $\alpha$); and a ring $\mathfrak{R}$ with unit is regular if and only if its principal left ideals form a complemented modular lattice.

**3. 3. Ring conditions on $\alpha$.** If $g$ is an idempotent in a regular ring $\mathfrak{R}$ and $\beta^i, \gamma^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ are in $\mathfrak{R}$, then, as we shall now prove, the conditions on $\alpha$: $\alpha$ is in $(g)_l$ and $\alpha\beta^i$ is in $(\gamma^i)_l$ for each $i$, are equivalent to: $\alpha$ is in $(e)_l$ for a suitable idempotent $e = e(g, \beta^1, \ldots, \gamma^1, \ldots)$.

We shall prove this for the case $m = 1$ (the general case will then follow at once from § 3. 2 (ii)). We write $\beta$ for $\beta^1$ and $\gamma$ for $\gamma^1$ and we may clearly suppose that $\gamma$ is idempotent. Then the conditions on $\alpha$ are equivalent to: $\alpha = \alpha g$ and $\alpha(\beta - \beta\gamma) = 0$, that is, to the conditions: $\alpha = \alpha g, \alpha f = 0$ where $f$ is an idempotent with $(f)_r = (\beta - \beta\gamma)_r$, that is, to the condition: $\alpha$ is in $(g - hg)_l$ where $h$ is any idempotent with $(h)_r = (gf)_r$.

**3. 4. Canonical basis.** If $M$ is a left module of finite span (of vectors of length $n$ with coordinates in a ring $\mathfrak{R}$) then $M$ is certainly spanned by a finite number of vectors $v^j = (\alpha^{j1}, \ldots, \alpha^{jn})$. If $\mathfrak{R}$ is regular, then $M$ is always spanned by a canonical basis (see § 1. 2), as we shall now verify.

Starting from the given $v^j$ which span $M$, there is an idempotent $e^n$ with $(e^n)_l = (\alpha^{1n}, \alpha^{2n}, \ldots)_l$ (this implies $\alpha^{jn} e^n = \alpha^{jn}$ for all $j$ and $\Sigma_j \beta^j \alpha^{jn} = e^n$

[2]) In (i), $(e, f)_l \leqq (e+g)_l$ since: $f - fe = (f-fe)g, g = u(f-fe)$, hence $ge = 0$, $e = (e+g) - g(e+g), f = fe + (fg - feg)(e+g)$. Also $e+g)_l \leqq (e, f)_l$ since: $e+g = = e + u(f-fe) = (e-uf)e + uf$. This implies that $(e+g)_l$ is the smallest left ideal containing $(e)_l$ and $(f)_l$.

In (ii), $(f-gf)_l \leqq (e)_l (f)_l$ since: $f - gf = (f-g)f$ and $f - fe = g(f-fe)$, hence $f - gf = (f-gf)e$. Also $(e)_l (f)_l \leqq (f-gf)_l$ since: $g = (f-fe)u$, hence if $x = xe = xf$, then $x(f-gf) = x - x(f-fe)uf = x - (x-x)uf = x$.

In (iii), $(e, f-fe)_l = (f)_l$. Also $(e)_l (f-fe)_l = 0$ since: $u = ue = u(f-fe)$ implies $u = u(f-fe)e = 0$.

for suitable $\beta^j$). Let $w^1 = e^n(\Sigma_k \beta^k v^k)$, and for $j \geqq 1$, $w^{j+1} = v^j - \alpha^{jn} w^1$. This new finite set of vectors (which we shall denote again as $v^j$) span $M$ and have the additional properties: $\alpha^{1n} = e^n$ (idempotent), $e^n \alpha^{1i} = \alpha^{1i}$ for all $i$, and $\alpha^{jn} = 0$ for all $j > 1$.

Now apply the procedure of the preceding paragraph to the vectors $v^j$ ($j \geqq 2$) to obtain an idempotent $e^{n-1}$ so that the vectors which span $M$ may be supposed to have the additional properties: $\alpha^{2,n-1} = e^{n-1}$, $e^{n-1}\alpha^{2,i} = \alpha^{2,i}$ for all $i$, and $\alpha^{j,n-1} = 0$ for $j > 2$. Successive repetitions of this procedure show that: $M$ can be spanned by vectors $v^j$ (now necessarily $n$ in number) with $\alpha^{j,n+1-j} = e^{n+1-j}$ (idempotent), $e^{n+1-j}\alpha^{ji} = \alpha^{ji}$ for all $i$, and $\alpha^{ji} = 0$ for $i > n+1-j$.

Now replace $v^1$ by $v^1 - \alpha^{1,n-1} v^2$ obtaining the additional property: $\alpha^{1,n-1} e^{n-1} = 0$. By repetition of this procedure, obtain: $\alpha^{1,i} e^i = 0$ for all $i < n$. Similarly, obtain: $\alpha^{ji} e^i = 0$ for all $i < n+1-j$.

If $u^j$ is now defined to be $v^{n+1-j}$, the $u^j$ are a canonical basis for $M$.

**3.5. Vector conditions on $\alpha$.** Suppose $g$ is an idempotent in a regular ring $\mathfrak{R}$ and for each $i = 1, \dots, m$ suppose $M^i$ is a left module of finite span and $v^i$ is a given vector. We shall now show that the conditions on $\alpha$: $\alpha$ is in $(g)_l$ and $\alpha v^i$ is in $M^i$ for each $i$, are equivalent to: $\alpha$ is in $(e)_l$ for a suitable idempotent $e = e(g, v^1, \dots, M^1, \dots)$.

We shall prove this for the case $m = 1$ (the general case will then follow at once from § 3.2 (ii)). We write $v^1 = v = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ and we may suppose that $M^1$ has a canonical basis $u^j = (\alpha^{j1}, \dots, \alpha^{jn})$, $j = 1, \dots, n$. Then the conditions on $\alpha$ are equivalent to: (i) $\alpha$ is in $(g)_l$ and (ii) $\alpha v = \Sigma_k \beta^k u^k$ for suitable $\beta^k$. But if such $\beta^k$ exist then $\alpha\alpha^j\alpha^{jj} = \beta^j \alpha^{jj}$ for all $j$. Hence condition (ii) on $\alpha$ may be written: $\alpha v \overset{\circ}{=} \Sigma_j \alpha\alpha^j u^j$ and is equivalent to the $n$ conditions: $\alpha(\alpha^k - \Sigma_j \alpha^j \alpha^{jk}) = 0$, $k = 1, \dots, n$. It is now sufficient to apply the result of § 3.3.

**3.6. The lattice of left modules of finite span.** If $\mathfrak{R}$ is a regular ring then, as we shall prove below, the non-empty left modules of finite span form a relatively complemented modular lattice $L$ when partially ordered by inclusion; if the regular ring $\mathfrak{R}$ has a unit then $L$ has a unit and hence is complemented (note that the vector $u = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ is always in $(u)_l$ if $\mathfrak{R}$ is regular, for $eu = u$ with $e$ any idempotent such that $(e)_r = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)_r$). This is now easily verified, using the following statements:

(i) $L$ has a zero (left module of finite span) consisting of the zero vector $(0, \dots, 0)$ only.

(ii) If $M^1$ is a left module spanned by vectors $u^{11}, \dots, u^{1n}$ and $M^2$ is a left module spanned by vectors $u^{21}, \dots, u^{2n}$, then the smallest left module containing $M^1$ and $M^2$ is spanned by $u^{11}, \dots, u^{1n}$, $u^{21}, \dots, u^{2n}$.

(iii) If $M^1$ and $M^2$ are left modules with canonical bases

$u^{1j}=(\alpha^{1j1},\ldots,\alpha^{1jn})$, $j=1,\ldots,n$, and $u^{2j}=(\alpha^{2j1},\ldots,\alpha^{2jn})$, $j=1,\ldots,n$,

respectively, then $M^0$, the set of all vectors common to $M^1$ and $M^2$ (clearly a left module) is a left module *of finite span*. We shall prove this now by induction on $n$ (for $n=1$ this is implied by (ii) of § 3.2).

Consider the $n$-th coordinate $\alpha^n$ of a vector $(\alpha^1,\ldots,\alpha^n)$ in $M^0$. For any such $\alpha^n$ it is clear that $\alpha^n\alpha^{1nn}=\alpha^n\alpha^{2nn}=\alpha^n$ so that, without changing the set of vectors in $M^0$, $u^{1n}$ and $u^{2n}$ may be replaced by $e^n u^{1n}$ and $e^n u^{2n}$ respectively where $e^n$ is any idempotent with $(e^n)_l=(\alpha^{1nn})_l(\alpha^{2nn})_l$. Thus we may suppose that $\alpha^{1nn}=\alpha^{2nn}=e^n$. Then necessary and sufficient conditions that $\alpha$ be the $n$-th coordinate of a vector in $M^0$ are: (i) $\alpha$ is in $(e)_l$ and (ii) for some $\alpha^i$, $\beta^i$, $\gamma^i$ $(i=1,\ldots,n-1)$,

$$(\alpha^1,\ldots,\alpha^{n-1})=\sum_{j=1}^{n-1}\beta^j(\alpha^{1j1},\ldots,\alpha^{1j(n-1)})+\alpha(\alpha^{1n1},\ldots,\alpha^{1n(n-1)})=$$
$$=\sum_{j=1}^{n-1}\gamma^j(\alpha^{2ji},\ldots,\alpha^{2j(n-1)})+\alpha(\alpha^{2n1},\ldots,\alpha^{2n(n-1)}).$$

The condition (ii), which involves vectors of length $n-1$, is equivalent to (the $\alpha^i$ may be ignored): $\alpha v$ is in $M$ where $v$ is the vector $(\alpha^{1ni}-\alpha^{2ni};\ i=1,\ldots,n-1)$ and $M$ is the left module spanned by $2n-2$ vectors of length $n-1$: $(\alpha^{1ji};\ i=1,\ldots,n-1)$, $(\alpha^{2ji};\ i=1,\ldots,n-1)$, $j=1,\ldots,n-1$.

It is now sufficient to apply the result of § 3.5 to see that these coordinates $\alpha$ form precisely a left principal ideal $(e)_l$, say.

Let $u$ be a vector in $M^0$ with $n$-th component $e$. Then a vector is in $M^0$ if and only if it differs by a multiple of $u$ from a vector common to $(M^1)'$ and $(M^2)'$, where $(M^1)'$ and $(M^2)'$ are spanned by $u^{1j}$, $j=1,\ldots,n-1$, and $u^{2j}$, $j=1,\ldots,n-1$, respectively.

It follows, by the induction, that $M^0$ is of finite span.

(iv) Suppose $M^1$ and $M^2$ are left modules with canonical bases $u^{1j}=(\alpha^{1j1},\ldots,\alpha^{1jn})$, $j=1,\ldots,n$, and $u^{2j}=(\alpha^{2j1},\ldots,\alpha^{2jn})$, $j=1,\ldots,n$, respectively and suppose $M^1$ is contained in $M^2$.

Then for each $j$, $(\alpha^{1jj})_l$ is contained in $(\alpha^{2jj})_l$. A relative complement of $M^1$ in $M^2$ may be obtained as $M$, the left module spanned by $u^1,\ldots,u^n$ with $u^j=(\alpha^{2jj}-\alpha^{2jj}\alpha^{1jj})u^{2j}$. For clearly this $M$ is a left module of finite span and is contained in $M^2$. Next, $M$ and $M^1$ have only the zero vector in common; for if

$$w=\sum_{j=1}^{n}\beta^j u^j=\sum_{j=1}^{n}\gamma^j u^{1j}$$

then, equating the $n$-th coordinates, we obtain $\beta^n(\alpha^{2nn}-\alpha^{2nn}\alpha^{1nn})=\gamma^n\alpha^{1nn}$;

multiplying on the right with the idempotent $\alpha^{1nn}$ shows that both sides of this equality are zero and hence:

$$w = \sum_{j=1}^{n-1} \beta^j u^j = \sum_{j=1}^{n-1} \gamma^j u^{1j}.$$

Successive reductions show that $w = 0$, as stated. Finally $M^2$ is contained in $M \oplus M^1$ (and hence $M^2 = M \oplus M^1$): for the identity:

$$u^{2j} = u^j + \alpha^{2jj} u^{1j} + (\alpha^{2jj} \alpha^{1jj} u^{2j} - \alpha^{2jj} u^{1j})$$

shows that $u^{2j} =$ vector in $M +$ vector in $M^1 + r$ where $r$ is a vector in $M^2$ with $i$-th coordinate zero for all $i \geqq j$. Thus by induction on $k$, every vector in $M^2$ with at most the first $k$ coordinates different from zero, is contained in $M \oplus M^1$; when $k$ takes the value $n$, we obtain: $M^2$ is contained in $M \oplus M^1$, as stated.

(v) If $R$ has a unit 1, then $L$ clearly has as unit (left module of finite span) the left module spanned by $u^1, \ldots, u^n$ with $u^j = (\alpha^{j1}, \ldots, \alpha^{jn})$, $\alpha^{ji} = 0$ if $j \neq i$ and $\alpha^{ji} = 1$ if $j = i$.

## 4. Construction of the auxiliary ring.

**4. 1. Homogeneous basis and normalized frame.** Let $L$ be a complemented modular lattice. Then $a_1, \ldots, a_n$ will be called a *homogeneous basis of order n* for $L$ if $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 1$ and $a_i$ is perspective to $a_j$ for all $i, j$. We shall adopt the notation:

$$A^0 = 0; \quad A^i = a_1 + \cdots + a_i \qquad (i = 1, \ldots, n);$$
$$A^i_j = a_1 + \cdots + a_{j-1} + a_{j+1} + \cdots + a_i \qquad (1 \leqq j \leqq i \leqq n).$$

Suppose that for such a homogeneous basis, $a_1$ is perspective to $a_i$ with axis $x_i$ for $i = 1, \ldots, n$ (clearly $x_1 = 0$): set

$$c_{ij} = (x_i + x_j)\ (a_i + a_j)$$

for all $i, j$. Then as the reader may easily verify, the $c_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ have the properties: for all $i$, $j$, $k$,

$$c_{ij} = c_{ji}; \quad c_{ii} = 0; \qquad (c_{ij} + c_{jk})(a_i + a_k) = c_{ik}; \tag{4. 1. 1}$$
$$a_i \oplus c_{ij} = a_j \oplus c_{ij}.$$

A homogeneous basis $a_1, \ldots, a_n$ together with a set of $c_{ij}$ with the properties (4. 1. 1) will be called a *normalized frame* for $L$.

If $i, j, k$ are all different, $P_{kj:ij} \equiv P_{jk:ji}$ (to be written as $P_{k:i}$ if $j$ is unambiguous) will denote the perspective mapping of $L(a_i + a_j)$ onto

$L(a_k + a_j)$ determined by the axis $c_{ik}$. The perspective mapping $P$ will be called *non-crossing* if both $i > j$ and $k > j$ or both $i < j$ and $k < j$.

The collection of all inverses of $a_j$ in $a_i + a_j$ will be denoted by $L_{ij}$ (these concepts, basic for the coordinatization theorem, are due to VON NEUMANN [7, vol. 23, page 20; 8, vol. II, pages 30, 32, 53]).

Throughout the rest of this paper we shall assume $n \geqq 3$. We shall develop definitions for addition and multiplication to apply to the elements in $L_{ij}$ for arbitrary, but fixed $i, j$ with $i \neq j$, such that $L_{ij}$ becomes a regular ring with unit provided that the normalized frame satisfies the three conditions (4. 3. 3), (4. 3. 4) and (4. 10. 3) below (these conditions are equivalent to Desargues's theorem in the case of projective geometry). These three conditions need to be postulated only for the case $n = 3$ since, as we shall verify, they hold necessarily whenever $n \geqq 4$.

**4. 2. The addition construction for inverses.** An important construction, which for fixed $i, j$ applies to two elements $x, y$ in $L_{ij}$ and yields an element $z$ is the following: Choose any $A, B$ satisfying one or more of the properties:

(4. 2. 1) $$a_i + A + B \geqq x,$$

(4. 2. 2) $$a_i(A + B + a_j) = B(a_i + a_j) = 0,$$

(4. 2. 3) $$Aa_j = 0.$$

Then define[3])

(4. 2. 4) $$z = [\{(x + A)(a_i + B) + a_j\}(y + B) + A](a_i + a_j).$$

We shall verify:

(i) (4. 2. 1) *implies* $z + a_j = a_i + a_j$,

(ii) (4. 2. 2) *implies* $za_j = Aa_j$,

so that (4. 2. 1), (4. 2. 2) and (4. 2. 3) together imply that $z$ is in $L_{ij}$.

Proof of (i):

$$\begin{aligned} z + a_j &= [\{(x + A)(a_i + B) + a_j\}(y + B + a_j) + A](a_i + a_j) && \text{(AL)} \\ &= [(x + A)(a_i + B) + a_j + A](a_i + a_j) && \text{(ST)} \\ &= [(x + A)(a_i + B + A) + a_j](a_i + a_j) && \text{(AL)} \\ &= (x + A + a_j)(a_i + a_j) && \text{using (4. 2. 1)} \\ &= a_i + a_j. \end{aligned}$$

---

3) Suppose, in the usual (Cartesian) $u, v$ plane, that $x$ is $(u_1, 0)$, $y$ is $(u_2, 0)$, $a_i$ is the origin, $a_j$ is the point at infinity on the $u$ axis, $A$ is the point at infinity on the $v$ axis, and $B$ is the point at infinity on the line $u = v$: then $(u_1 + u_2, 0)$ coincides with the $z$ of (4. 2. 4).

Proof of (ii):

$$\begin{aligned}
za_j &= [\{(x+A)(a_i+B)+a_j\}(y+B)+A]a_j \\
&= [\{(x+A)(A+a_j)(B+a_i)+a_j\}(y+B)+A]a_j && \text{(CI)} \\
&= [\{(x+A)(A+a_j)B+a_j\}(y+B)+A]a_j && \text{using (CI) and (4.2.2)} \\
&= [(x+A)(A+a_j)B+a_j(y+B)+A]a_j && \text{(ML)} \\
&= [(x+A)(A+a_j)B+A]a_j && \text{using (CI) and (4.2.2)} \\
&= (x+A)(A+B)a_j && \text{(AL)} \\
&= [A+x(A+B)(a_i+a_j)]a_j && \text{(ML)} \\
&= [A+x(A+B)a_j]a_j && \text{using (CI) and (4.2.2)} \\
&= Aa_j.
\end{aligned}$$

We shall now show:

(4.2.5) *The $z$ of* (4.2.4) $\geqq$ *some element $E$ in $L_{ij}$ if* (4.2.1) *and* (4.2.2) *hold*[4].
(4.2.6) *The $z$ of* (4.2.4) $\leqq$ *some element $F$ in $L_{ij}$ if* (4.2.2) *and* (4.2.3) *hold.*

Indeed, (4.2.5) holds with $E=[z-za_j]$ since this $E$ is in $L_{ij}$ $(E\oplus a_j = z+a_j = a_i+a_j$, assuming (4.2.1)).

Again (4.2.6) holds with $F=z+[(a_i+a_j)-(z+a_j)]$ since this $F$ is in $L_{ij}$ $(F+a_j=a_i+a_j$ and $a_jF=a_j(z+a_j)F=a_jz=0$, assuming (4.2.2) and (4.2.3)).

Of course, if (4.2.1), (4.2.2) and (4.2.3) all hold, then $E\leqq z\leqq F$ and the indivisibility of inverses shows that $E$ and $F$ coincide and coincide with $z$.

**4.3. Uniqueness of the addition construction.** We shall now show that for $x, y$ fixed, the $E$ of (4.2.5) and the $F$ of (4.2.6) may be chosen independent of the $A$, $B$ at least to this extent. Suppose $A_0$, $B_0$ are fixed elements which satisfy (4.2.1), (4.2.2) and (4.2.3) hence determine some fixed $z_0$ in $L_{ij}$: *if we now restrict $A$, $B$ by the additional condition:*

(4.3.1) $$(A_0+B_0+a_i+a_j)(A+B+a_i+a_j)=a_i+a_j,$$

*then* (4.2.5) *and* (4.2.6) *hold with this fixed $z_0$ for $E$ and $F$.* In particular, if $A$, $B$ satisfy (4.3.1) and all of (4.2.1), (4.2.2) and (4.2.3), then the $z$ they determine coincides with this fixed $z_0$.

To prove this, we first make the following observations (i) to (iv):

(i) $(A+A_0)a_j=Aa_j$ if $A$, $B$ satisfy (4.3.1).

Indeed,
$$\begin{aligned}
(A+A_0)a_j &= [A_0(A+a_j)(a_i+a_j)+A]a_j && \text{using (CI) and (4.3.1)} \\
&= [A_0\{a_i(A_0+a_j)+a_j\}(A+a_j)+A]a_j && \text{(CI)} \\
&= [A_0a_j(A+a_j)+A]a_j && \text{using (4.2.2)} \\
&= Aa_j && \text{using (4.2.3).}
\end{aligned}$$

[4]) (4.2.2) is used only to prove uniqueness of $E$ in § 4.3.

(ii) $A_0+A$ and $B_0+B$ satisfy (4.2.1) since $A_0$ and $B_0$ do.

(iii) $A_0+A$ and $B_0+B$ satisfy (4.2.2) if $A$ and $B$ satisfy (4.2.2) and (4.3.1).

Indeed,

$$\begin{aligned}
a_i(A_0+A+B_0+B+a_j) &= a_i[(A+B)(A_0+B_0+a_i+a_j)+A_0+B_0+a_j] && \text{(CI)}\\
&= a_i[(A+B)(a_i+a_j)+A_0+B_0+a_j] && \text{using (4.3.1)}\\
&= a_i[(A+B+a_j)a_i+A_0+B_0+a_j] && \text{(AL), (ML)}\\
&= a_i(A_0+B_0+a_j) && \text{using (4.2.2)}\\
&= 0 && \text{using (4.2.2);}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(B_0+B)(a_i+a_j) &= [B_0(B+a_i+a_j)+B](a_i+a_j) && \text{(CI)}\\
&= [B_0(a_i+a_j)+B](a_i+a_j) && \text{using (4.3.1)}\\
&= B(a_i+a_j) && \text{using (4.2.2)}\\
&= 0 && \text{using (4.2.2).}
\end{aligned}$$

(iv) $A_0+A$ and $B_0+B$ satisfy (4.2.3) if $A$ and $B$ satisfy (4.2.3) and (4.3.1). This follows immediately from (i) above if $A$ and $B$ satisfy (4.2.3).

Let $z_1$ be the $z$ determined by $A_0+A$ and $B_0+B$ and let $z_2$ be the $z$ determined by $A$ and $B$.

Now if $A, B$ satisfy (4.3.1), (4.2.1) and (4.2.2) then $z_1 \geqq z_2$, $z_1+a_j=z_2+a_j$, $z_1a_j=z_2a_j$, hence by the general indivisibility of inverses, $z_1=z_2$. Since clearly $z_1 \geqq z_0$, it follows that $z_2 \leqq z_0$ as required.

Next, if $A, B$ satisfy (4.3.1), (4.2.2) and (4.2.3) then $z_1 \geqq z_2$, $z_1 \geqq z_0$, and $z_1$ is in $L_{ij}$ since $A_0+A$ and $B_0+B$ satisfy all of (4.2.1), (4.2.2) and (4.2.3). From the indivisibility of inverses it follows that $z_0=z_1 \geqq z_2$ as required. This completes the proof of the statement at the beginning of this section.

Thus the following theorem (4.3.2) holds if $n \geqq 4$ (as we show below):

(4.3.2) *For all $A, B \leqq a_i+a_j+a_k$ for some $k$ and satisfying all of* (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3), *the $z$ of* (4.2.4) *has the same value (necessarily in $L_{ij}$).*

More generally, the following theorems (4.3.3), (4.3.4) hold if $n \geqq 4$ (as we show below):

(4.3.3) *There exists a fixed $z_0$ (necessarily in $L_{ij}$) such that: for all $A, B \leqq a_i+a_j+a_k$ for some $k$ and satisfying* (4.2.1) *and* (4.2.2), *the $z$ of* (4.2.4) $\geqq z_0$.

(4.3.4) *There exists a fixed $z_0$ (necessarily in $L_{ij}$) such that: for all $A, B \leqq a_i+a_j+a_k$ for some $k$ and satisfying* (4.2.2) *and* (4.2.3), *the $z$ of* (4.2.4) $\leqq z_0$.

*If* (4.3.2) *holds, in particular if $n \geqq 4$, we shall define $x \dotplus y$ to be the common $z$ of* (4.3.2) *(necessarily uniquely determined by $x, y$).*

We note that $A, B \leqq a_i + a_j + a_k$ for some $k$ and satisfying all of (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3) do exist; for example, $A = c_{kj}, B = a_k$ with $k \neq i$. Indeed, with this choice for $A, B$,

$$\begin{aligned}
&a_i + A + B = a_i + a_j + a_k \geqq x,\\
&a_i(A + B + a_j) = a_i(a_k + a_j) = 0,\\
&B(a_i + a_j) = a_k(a_i + a_j) = 0,\\
&Aa_j = c_{kj}a_j = 0.
\end{aligned}$$

Substituting $A = c_{kj}$, $B = a_k$ in (4.2.4) we obtain:

$$(4.3.5) \qquad x \dotplus y = [\{(x + c_{jk})(a_i + a_k) + a_j\}(y + a_k) + c_{jk}](a_i + a_j).$$

Hence all of (4.3.2), (4.3.3), (4.3.4) are non-vacuous; either of (4.3.3), (4.3.4) implies (4.3.2) with $z_0$ necessarily identical with the common $z$ of (4.3.2).

Easy calculation shows that $a_i$ is a zero for the addition $\dotplus$; that is, $a_i \dotplus x = x \dotplus a_i = x$ for all $x$ in $L_{ij}$.

P r o o f o f (4.3.3) a n d (4.3.4).

To prove (4.3.3) and (4.3.4) assuming $n \geqq 4$, let $z_0$ be taken as the $z$ determined by $A_0 = c_{mj}$, $B_0 = a_m$, for any $m \neq i, j$; this $z_0$ will be independent of the choice of $m$. For any $k \neq i, j$, there will be an $m \neq i, j, k$ since $n \geqq 4$.

Throughout the rest of this paper we shall assume *without explicit statement* that (4.3.2) does hold, so that $x \dotplus y$ is defined for $x, y$ in $L_{ij}$. Where (4.3.3) or (4.3.4) is required, an explicit assumption will be made [5]).

In section 7, we show that (4.3.2) is equivalent to the apparently stronger (4.3.3) and (4.3.4) in the case that the elements of $L_{ij}$ are atoms (this occurs when the elements of $L$ are the linear subspaces of a projective geometry).

**4.4. The symmetric form for the addition construction.** Suppose now that $p, q$ are elements $\leqq a_i + a_j + a_k$ for some $k$ and that $A$ and $B$ are defined in terms of $p, q$ by the relations:

$$A = (p + x)(q + a_j), \quad B = q.$$

Then, as we shall show below, each of (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3) is implied

---

[5]) (4.3.3) and (4.3.4), a fortiori (4.3.2), hold necessarily, even if $n = 3$, if $x = a_i$ or $y = a_i$. Indeed, if $x = a_i$ and (4.2.2) holds, then the $z$ of (4.2.4) reduces to $y + Aa_j$ which shows that (4.3.3) and (4.3.4) hold with $y$ for $z_0$; if $y = a_i$ and (4.2.2) holds, then the $z$ of (4.2.4) reduces to $x(A + B + a_i) + Aa_j$ which shows that (4.3.3) and (4.3.4) hold with $x$ for $z_0$.

by a corresponding condition[6]):

(4.4.1) $$p + q = q + a_i,$$

(4.4.2) $$q(a_i + a_j) = 0, \quad p \leqq a_i + q,$$

(4.4.3) $$p(a_i + a_j) \leqq x.$$

The conditions (4.4.1), (4.4.2) and (4.4.3), for both $p, q$ and $q, p$, are together equivalent to:

(4.4.4) $$\begin{cases} p + a_i = q + a_i = p + q; \\ q(a_i + a_j) = p(a_i + a_j) = 0; \\ p + q \leqq a_i + a_j + a_k. \end{cases}$$

Finally $p = c_{ik}$, $q = a_k$ do satisfy (4.4.4).

That each of (4.4.1), (4.4.2), (4.4.3) implies the corresponding relation (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3) respectively is shown as follows:

$$\begin{aligned} a_i + A + B &= a_i + q + (p + x)(q + a_j) \\ &= p + (p + x)(q + a_j) = (p + x)(p + q + a_j) && \text{using (4.4.1)} \\ &\geqq x(a_i + a_j) = x. \end{aligned}$$

$$a_i(A + B + a_j) = a_i(q + a_j) = 0 \qquad \text{using (CI) and (4.4.2).}$$

$$\begin{aligned} Aa_j &= (p + x)a_j \\ &= [p(a_i + a_j) + x]a_j && \text{(CI)} \\ &= xa_j && \text{using (4.4.3)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Now substitution for $A, B$ in (4.2.4) gives:

(4.4.5) $$\begin{aligned} z &= [\{(p + x)(q + a_j) + a_i\}(y + q) + (p + x)(q + a_j)](a_i + a_j) \\ &= [(p + a_j)(y + q) + (p + x)(q + a_j)](a_i + a_j) \end{aligned}$$

if (4.4.1) holds (using (ML)).

We can now derive relations between $x \dotplus y$ and $p$ and $q$. First, (4.3.2) shows at once that:

(4.4.6) $$x \dotplus y = [(p + a_j)(y + q) + (p + x)(q + a_j)](a_i + a_j)$$

if $p, q$ satisfy all of (4.4.1), (4.4.2), (4.4.3), in particular if, $p, q$ satisfy (4.4.4); in this case we shall write $(x \dotplus y)_{p,q}$ to denote the formal expression on the right side of (4.4.6) (its value is, of course, $x \dotplus y$). In particular, using $p = c_{ik}, q = a_k$, we obtain

(4.4.7) $$x \dotplus y = [(x + c_{ik})(a_k + a_j) + (y + a_k)(c_{ik} + a_j)](a_i + a_j).$$

Next, as we shall prove below:

---

[6]) To derive (4.2.2) we use only $q(a_i + a_j) = 0$ but for a subsequent calculation it is advantageous to restrict (4.4.2) by the condition $p \leqq a_i + q$.

(4. 4. 8) *If* (4. 3. 3) *holds, then*:

$$x \dotplus y \leqq [(p+x)(q+a_j)+(q+y)(p+a_j)](a_i+a_j),$$

*provided that* (4. 4. 1), (4. 4. 2) *hold.*

(4. 4. 9) *If* (4. 3. 4) *holds, then:*

$$x \dotplus y \geqq [(p+x)(q+a_j)+(q+y)(p+a_j)](a_i+a_j),$$

*provided that* (4. 4. 2), (4. 4. 3) *hold.*

To prove (4. 4. 8) it need only be noted that if (4. 4. 1) and (4. 4. 2) hold, then (4. 4. 5) gives:

$$z = [(p+a_j)(y+q)+(p+x)(q+a_j)](a_i+a_j)$$
$$\geqq x \dotplus y$$

since (4. 2. 1) and (4. 2. 2) hold.

To prove (4. 4. 9) we note that if (4. 4. 2) and (4. 4. 3) hold, then $p \leqq q+a_i$ and (4. 2. 2), (4. 2. 3) hold; hence from (4. 4. 5):

$$x \dotplus y \geqq z \geqq [\{p+x(q+a_i)+a_j\}(y+q)+(p+x)(q+a_j)](a_i+a_j) \quad \text{(ML)}$$
$$\geqq [(p+a_j)(y+q)+(p+x)(q+a_j)](a_i+a_j).$$

**4. 5. Commutativity of the addition construction.** Since $(x \dotplus y)_{p,q}$ is identical with $(y \dotplus x)_{q,p}$ it follows, using any $p, q$ which statisfy (4. 4. 4), that $x \dotplus y = y \dotplus x$.

**4. 6. Associativity of the addition construction.** For fixed $y$ in $L_{ij}$ and $p, q$ satisfying (4. 4. 4) we define:

$$p' = (q+y)(p+a_j), \quad q' = (a_i+p')(q+a_j).$$

Then $p', q'$ also satisfy (4. 4. 4). To prove this we note the identities:

$$a_j+p' = a_j+p, \quad a_j+q' = a_j+q,$$
$$y+p' = y+q, \qquad p'q' = pq.$$

Now

$$a_i+q' = (a_i+p')(q+a_j+a_i) = a_i+p',$$
$$p'+q' = (a_i+p')(q+a_j+p') = a_i+p'.$$

Hence

$$p'+a_i = q'+a_i = p'+q'.$$

Also

$$p'(a_i+a_j) = a_j(q+y) = ya_j = 0,$$
$$q'(a_i+a_j) = a_j(a_i+p') = 0,$$
$$p'+q' \leqq p+q+a_j \leqq a_i+a_j+a_k.$$

Now if $x, y, w$ are all in $L_{ij}$, then, as we shall now prove:

(4. 6. 1) $$[(x \dotplus y)_{p,q} \dotplus w]_{p',q'} = [x \dotplus (y \dotplus w)_{p',q'}]_{p,q}.$$

Indeed,

left side of (4. 6. 1)

$$=[(p'+a_j)(w+q')+[p'+\{p'+(p+x)(q+a_j)\}(a_i+a_j)](q'+a_j)](a_i+a_j)$$
$$=[(p+a_j)(w+q')+\{(p+x)(q+a_j)+p'\}(q+a_j)](a_i+a_j)$$
$$=[(p+a_j)(w+q')+(p+x)(q+a_j)](a_i+a_j);$$

right side of (4. 6. 1)

$$=[(p+a_j)((y\dotplus w)_{p',q'}+q)+(p+x)(q+a_j)](a_i+a_j)$$
$$=[(p+a_j)[\{(p+a_j)(w+q')+q\}(a_i+a_j)+q]+(p+x)(q+a_j)](a_i+a_j)$$
$$=[(p+a_j)(w+q')+(p+x)(q+a_j)](a_i+a_j)$$
$$=\text{left side of (4. 6. 1)}.$$

**4. 7. Subtraction as the inverse of the addition construction.** We shall now verify that for given $x$ and $y$ in $L_{ij}$ the equation $w\dotplus y=x$ has a solution $w$ (the uniqueness of this $w$, to be denoted $x-y$, necessarily follows from the associativity and commutativity of $\dotplus$): for this purpose we set

$$w=[\{x+(y+a_k)(c_{ik}+a_j)\}(a_k+a_j)+c_{ik}](a_i+a_j). \tag{4. 7. 1}$$

First we verify that this $w$ is in $L_{ij}$:

$$\begin{aligned}
wa_j&=[\{x+(y+a_k)(c_{ik}+a_j)\}(a_k+a_j)+c_{ik}]a_j\\
&=[x+(y+a_k)(c_{ik}+a_j)]a_j && \text{(CI), (ST)}\\
&=[x+(y+a_k)(a_i+a_j)(c_{ik}+a_j)]a_j && \text{(CI)}\\
&=[x+ya_j]a_j && \text{(ML)}\\
&=xa_j=0;\\
w+a_j&=[\{x+(y+a_j+a_k)(c_{ik}+a_j)\}(a_k+a_j)+c_{ik}](a_i+a_j) && \text{(AL)}\\
&=[(x+c_{ik}+a_j)(a_k+a_j)+c_{ik}](a_i+a_j) && \text{(ST)}\\
&=(a_k+a_j+c_{ik})(a_i+a_j) && \text{(ST)}\\
&=a_i+a_j, && \text{(ST).}
\end{aligned}$$

Next we verify that $w\dotplus y=x$; indeed from (4. 4. 7) we obtain:

$$\begin{aligned}
w\dotplus y&=[(w+c_{ik})(a_k+a_j)+(y+a_k)(c_{ik}+a_j)](a_i+a_j)\\
&=[\{x+(y+a_k)(c_{ik}+a_j)\}(a_k+a_j)+(y+a_k)(c_{ik}+a_j)](a_i+a_j)\\
& && \text{(AL), (ST), (ML)}\\
&=[x+(y+a_k)(c_{ik}+a_j)][a_k+a_j+(y+a_k)(c_{ik}+a_j)](a_i+a_j) && \text{(AL)}\\
&=[x+(y+a_k)(c_{ik}+a_j)](a_i+a_j) && \text{(AL), (ST)}\\
&=x+(y+a_k)(a_i+a_j)(c_{ik}+a_j) && \text{(ML)}\\
&=x+ya_j && \text{(ML)}\\
&=x,
\end{aligned}$$

as required.

Thus the elements of $L_{ij}$ form an abelian group under the addition $x \dotplus y$.

**4.8. Invariance of $\dotplus$ under the perspectivities $P$.** Suppose $x, y$ are in $L_{ij}$. We shall show:

(4.8.1) $$P(x \dotplus y) = (Px) \dotplus (Py) \quad \text{with} \quad P = P_{ik:ij} \qquad (\text{see § 4.1});$$

(4.8.2) $$P(x \dotplus y) = (Px) \dotplus (Py) \quad \text{with} \quad P = P_{kj:ij}.$$

Proof of (4.8.1). From (4.3.5), using the commutativity of $\dotplus$:

$$P_{ik:ij}(x \dotplus y) = [\{(y + c_{jk})(a_i + a_k) + a_j\}(x + a_k) + c_{jk}](a_i + a_k).$$

We obtain an expression for $(Px) \dotplus (Py)$ using (4.3.5) with $k$ and $j$ interchanged:

$$\begin{aligned}
&(P_{ik:ij}x) \dotplus (P_{ik:ij}y) \\
&= \{[\{(x + c_{jk})(a_i + a_k) + c_{kj}\}(a_i + a_j) + a_k][(y + c_{jk})(a_i + a_k) + a_j] + c_{kj}\}(a_i + a_k) \\
&= [(x + a_k)\{(y + c_{jk})(a_i + a_k) + a_j\} + c_{kj}](a_i + a_k) \qquad \text{(AL), (ST), (ML)} \\
&= P_{ik:ij}(x \dotplus y).
\end{aligned}$$

Proof of (4.8.2). From (4.4.7)

$$x \dotplus y = [(x + c_{ik})(a_k + a_j) + (y + a_k)(c_{ik} + a_j)](a_i + a_j).$$

We may use $A = x \dotplus y$, $B = y$ in (4.2.4) to calculate right side of (4.8.2) for, as we now show, these $A, B$ satisfy the relevant conditions (4.2.1), (4.2.2) and (4.2.3) (with $i$ and $k$ interchanged). Indeed $A, B$ are both in $L_{ij}$, and

$$A + B = [(x + c_{ik})(a_k + a_j) + y + a_k](a_i + a_j), \qquad \text{(AL), (ST)}.$$

Hence:

$$a_k + A + B \geqq (x + c_{ik})(a_k + a_j); \quad a_k(A + B + a_j) = 0; \quad B(a_k + a_j) = 0; \quad Aa_j = 0.$$

With these $A, B$, (4.2.4) (with $i$ and $k$ interchanged) gives:

right side of (4.8.2)

$$= \{[\{(x + c_{ik})(a_k + a_j) + A\}(a_k + y) + a_j][(y + c_{ik})(a_k + a_j) + y] + A\}(a_k + a_j).$$

Since

$$(y + c_{ik})(a_k + a_j) + y = (y + c_{ik})(a_i + a_j + a_k) \geqq c_{ik}, \qquad \text{(AL)}$$

and

$$(x + c_{ik})(a_k + a_j) + A \geqq (y + a_k)(c_{ik} + a_j), \qquad \text{(AL), (ST)},$$

therefore

$$\begin{aligned}
\text{right side of (4.8.2)} &\geqq [\{(y + a_k)(c_{ik} + a_j) + a_j\}c_{ik} + A](a_k + a_j) \\
&= (c_{ik} + A)(a_k + a_j) \qquad \text{(AL), (ST)} \\
&= \text{left side of (4.8.2)}.
\end{aligned}$$

Since both sides of (4.8.2) are in $L_{ij}$, the indivisibility of inverses shows that $\geqq$ in (4.8.2) implies $=$ in (4.8.2).

(4.8.1) and (4.8.2) show that the abelian group $L_{ij}$ (under $+$) is mapped group-isomorphically on the group $L_{ik}$ by $P_{ik:ij}$ and is mapped group-isomorphically on the group $L_{kj}$ by $P_{kj:ij}$ (in particular, $x-y$, the subtraction of inverses, is invariant under the mappings $P_{ik:ij}$, $P_{kj:ij}$).

**4.9. The multiplication construction for inverses.** A second construction which, for fixed $i, j$, applies to two elements $x, y$ in $L_{ij}$ and yields an element $z$ is the following: Choose any $A, B$ satisfying one or more of the properties[7]):

(4.9.1) $$x+A+B \geqq a_i.$$

(4.9.2) $$a_i(A+B+a_j)=B(a_i+a_j)=0.$$

(4.9.3) $$Aa_j=0.$$

Then define:

(4.9.4) $$z=[(x+A)(a_i+B)+\{(c_{ij}+A)(a_i+B)+y\}(a_j+B)](a_i+a_j).$$

We shall verify:

(i) (4.9.1) *implies* $z+a_j=a_i+a_j$,

(ii) (4.9.2) *implies* $z\,a_j=[(c_{ij}+A\,a_j)a_i+y]a_j$,

so that (4.9.1), (4.9.2), and (4.9.3) together imply that $z$ is in $L_{ij}$.

Proof of (i):

$$\begin{aligned}
z+a_j &= [(x+A)(a_i+B)+\{(c_{ij}+A)(a_i+B)+y+a_j\}(a_j+B)](a_i+a_j) && \text{(AL)}\\
&= [(x+A)(a_i+B)+(a_i+a_j+A)(a_i+a_j+B)(a_j+B)](a_i+a_j) && \text{(AL)}\\
&= [(x+A)(a_i+B)+(a_i+a_j+A)(a_j+B)](a_i+a_j) && \text{(ST)}\\
&= (a_i+a_j+A)[a_j+B+(x+A)(a_i+B)](a_i+a_j) && \text{(AL)}\\
&= a_j+(x+A+B)(a_i+B)(a_i+a_j) && \text{(ST), (ML), (AL)}\\
&= a_j+a_i && \text{from (4.9.1), (ST), (ML) and (4.9.2).}
\end{aligned}$$

Proof of (ii):

$$\begin{aligned}
z\,a_j &= [(x+A)(a_i+B)(a_j+B)+\{(c_{ij}+A)(a_i+B)+y\}(a_j+B)]a_j && \text{(CI)}\\
&= [(x+A)B+\{(c_{ij}+A)(a_i+B)+y\}(a_j+B)]a_j && \text{(ML) and (4.9.2)}\\
&= [AB+\{(c_{ij}+A)(a_i+B)+y\}(a_j+B)]a_j && \text{(CI), (ST) and (4.9.2)}\\
&= [(c_{ij}+A)(a_i+B)+y]a_j && \text{(ST)}\\
&= [(c_{ij}+A)(a_i+B)(a_i+a_j)+y]a_j && \text{(CI)}\\
&= [\{c_{ij}+A(a_i+a_j)\}a_i+y]a_j && \text{(ML) and (4.9.2)}\\
&= [(c_{ij}+Aa_j)a_i+y]a_j && \text{(CI) and (4.9.2).}
\end{aligned}$$

---

[7]) (4.9.2) is identical with (4.2.2), (4.9.3) with (4.2.3); in the presence of (4.9.2), (4.9.1) and (4.2.1) are equivalent and equivalent to $a_i+A+B=x+A+B$ (this follows from the general indivisibility of inverses since $a_i+A+B+a_j=x+A+B+a_j$ and $(a_i+A+B)a_j=(A+B)a_j=(x+A+B)a_j$).

It now follows, as in the proof of (4. 2. 5), (4. 2. 6) that:

(4. 9. 5) *The $z$ of* (4. 9. 4) $\geqq$ *some element $E$ in $L_{ij}$ if* (4. 9. 1) *and* (4. 9. 2) *hold*[8]).
(4. 9. 6) *The $z$ of* (4. 9. 4) $\leqq$ *some element $F$ in $L_{ij}$ if* (4. 9. 2) *and* (4. 9. 3) *hold.*

Of course, if (4. 9. 1), (4. 9. 2) and (4. 9. 3) all hold, then $E \leqq z \leqq F$ and the indivisibility of inverses shows that $E$ and $F$ coincide and coincide with $z$.

**4. 10. Uniqueness of the multiplication construction.** The argument of § 4. 3 shows: for $x, y$ fixed, the $E$ of (4. 9. 5) and the $F$ of (4. 9. 6) may be chosen independent of the $A$, $B$ at least to this extent. Suppose $A_0$, $B_0$ are fixed elements which satisfy all of (4. 9. 1), (4. 9. 2) and (4. 9. 3) and hence determine some fixed $z_0$ in $L_{ij}$; *if we now restrict $A$, $B$ by the additional condition:*

(4. 10. 1) $$(A_0+B_0+a_i+a_j)(A+B+a_i+a_j)=a_i+a_j,$$

*then* (4. 9. 5) *and* (4. 9. 6) *hold with this fixed $z_0$ for $E$ and $F$.* In particular, if $A$, $B$ satisfy (4. 10. 1) and all of (4. 9. 1), (4. 9. 2) and (4. 9. 3) then the $z$ they determine coincides with this fixed $z_0$.

Thus, with proofs as in § 4. 3, if $n \geqq 4$:

(4. 10. 2) *For all $A, B \leqq a_i+a_j+a_k$ for some $k$ and satisfying all of* (4. 9. 1), (4. 9. 2), (4. 9. 3), *the $z$ of* (4. 9. 4) *has the same value (necessarily in $L_{ij}$).*

More generally, the following theorems (4. 10. 3), (4. 10. 4) hold if $n \geqq 4$:

(4. 10. 3) *There exists a fixed $z_0$ (necessarily in $L_{ij}$) such that: for all $A, B \leqq a_i+a_j+a_k$ for some $k$ and satisfying* (4. 9. 1) *and* (4. 9. 2), *the $z$ of* (4. 9. 4) $\geqq z_0$.

(4, 10. 4) *There exists a fixed $z_0$ (necessarily in $L_{ij}$) such that: for all $A, B \leqq a_i+a_j+a_k$ for some $k$ and satisfying* (4. 9. 2) *and* (4. 9. 3), *the $z$ of* (4. 9. 4) $\leqq z_0$.

*If* (4. 10. 2) *holds, in particular if $n \geqq 4$, we shall define $x \times y$ to be the common $z$ of* (4. 3. 2) *(necessarily uniquely determined by $x, y$).*

---

[8]) We actually use only (4. 9. 1) here but the uniqueness of $E$ as established in the next section applies only if the additional condition (4. 9. 2) holds. We note here that in the presence of condition (4. 2. 2), that is, (4. 9. 2), the discussions of both §§ 4. 2, 4. 3 for $\dot{+}$ and §§ 4. 9, 4. 10 for $\times$, could be included (as special cases) in a single discussion of a general construction, for $x, y, w$ in $L_{ij}$:

$$z' = [\{(x+A)(a_i+B)+a_j\}(y+B)+\{(A+c_{ij})(a_i+B)+w\}(a_j+B)](a_i+a_j).$$

This $z'$ reduces to (4. 2. 4) if $c_{ij}$ is chosen for $w$; on the other hand, if $a_i$ is chosen for $y$ and then $w$ replaced by $y$, $z'$ reduces to (4. 9. 4). This $z'$ actually expresses $(x \times w) \dot{+} y$ (see (5. 2. 2)).

We note that $A, B \leqq a_i + a_j + a_k$ for some $k$ and satisfying all of (4. 9. 1), (4. 9. 2), (4. 9. 3) do exist, for example $A = c_{kj}$, $B = a_k$ with $k \neq i, j$. Substituting $A = c_{kj}$, $B = a_k$ in (4. 9. 4) we obtain:

$$
\begin{aligned}
(4.\,10.\,5) \qquad x \times y &= [(x + c_{jk})(a_i + a_k) + (y + c_{ik})(a_j + a_k)](a_i + a_j) \\
&= (P_{ik:ij}x + P_{kj:ij}y)(a_i + a_j).
\end{aligned}
$$

Hence if any of (4. 10. 2), (4. 10. 3), (4. 10. 4) hold, they are non-vacuous and either of (4. 10. 3), (4. 10. 4) implies (4. 10. 2) with $z_0$ necessarily identical with the common $z$ of (4. 3. 2).

Throughout the rest of this paper we shall assume *without explicit statement* that (4. 10. 2) does hold, so that $x \times y$ is defined for $x, y$ in $L_{ij}$. Where (4. 10. 3) is required, an explicit assumption will be made[9, 10]).

We shall show in section 7 that (4. 10. 2) is equivalent to the apparently stronger (4. 10. 3) and (4. 10. 4) in the case that the elements of $L_{ij}$ are atoms.

Easy calculation shows that $a_i$ is a two-sided zero and $c_{ij}$ is a two-sided unit for this multiplication; that is,

$$a_i \times x = x \times a_i = a_i, \quad c_{ij} \times x = x \times c_{ij} = x,$$

for all $x$ in $L_{ij}$.

**4. 11. Associativity of multiplication.** We will now verify that if $w, x, y$ are in $L_{ij}$, then:

$$(w \times x) \times y = w \times (x \times y).$$

We note that if $u = v \times x$ where $v$ is an arbitrary inverse, then $A = (x + c_{ik})(a_k + a_j)$, $B = a_k$ may be used in (4. 9. 4) to obtain $u \times y$. For as we shall show, these $A$, $B$ satisfy the relevant conditions (4. 9. 1), (4. 9. 2) and (4. 9. 3):

---

[9]) (4. 10. 4) has been given for completeness but is never actually assumed in our present deduction of the coordinatization theorem (see footnote 12) so that, as follows from this theorem, (4. 3. 3), (4. 3. 4) and (4. 10. 3) together imply (4. 10. 4). The existence of non-Desarguesian harmonic-point projective plane geometries shows that (4. 3. 3) and (4. 3. 4) do not necessarily imply (4. 10. 2) (see footnote 19, p. 245).

[10]) (4. 10. 3) and (4. 10. 4), a fortiori (4. 10. 2), hold necessarily, even in the case $n = 3$, if $x = a_i$, or $x = c_{ij}$, or $y = a_i$ or $y = c_{ij}$. Indeed if $x = a_i$ and (4. 9. 2) holds, then the $z$ of (4. 9. 4) reduces to $a_i + [y + (c_{ij} + Aa_j)a_i]a_j$ which shows that (4. 10. 3) and (4. 10. 4) hold with $a_i$ for $z_0$; if $x = c_{ij}$ and (4. 9. 2) holds, then the $z$ of (4. 9. 4) reduces to $(Aa_j + c_{ij})a_i + y[a_j + (A + B \quad c_{ij})a_i]$ which shows that (4. 10. 3) and (4. 10. 4) hold with $y$ for $z_0$. If $y = a_i$ and (4. 9. 2) holds, then the $z$ of (4. 9. 4) reduces to $(x + A + B)a_i$ which shows that (4. 10. 3) and (4. 10. 4) hold with $a_i$ for $z_0$; if $y = c_{ij}$ and (4. 9. 2) holds, then the $z$ of (4. 9. 4) reduces to $Aa_j + x(a_i + A + B)$ which, with the help of footnote 7, shows that (4. 10. 3) and (4. 10. 4) hold with $x$ for $z_0$.

indeed, using (4. 10. 5) to express $v \times x$, yields:

$$\text{(4. 11. 1)} \qquad (v \times x) + A = [(v + c_{jk})(a_i + a_k) + A](a_i + a_j) + A$$
$$= (v + c_{jk})(a_i + a_k) + A, \qquad \text{(AL), (ST);}$$
$$(v \times x) + A + B = a_i + a_k + A \geqq a_i, \qquad \text{(AL), (ST);}$$
$$a_i(A + B + a_j) = a_i(a_k + a_j) = 0; \quad B(a_i + a_j) = a_k(a_i + a_j) = 0;$$
$$A a_j = (x + c_{ik})a_j = x a_j = 0 \qquad \text{(CI).}$$

Now use these $A$, $B$ in (4.9.4) to obtain $x \times y$ and also $(w \times x) \times y$. Then:

$$x \times y = [(x + A)(a_i + a_k) + \{(c_{ij} + A)(a_i + a_k) + y\}(a_j + a_k)](a_i + a_j)$$
$$= [c_{ik} + x a_i + \{(c_{ij} + A)(a_i + a_k) + y\}(a_j + a_k)](a_i + a_j) \quad \text{(AL), (ST), (ML)}$$
$$\geqq [c_{ik} + \{(c_{ij} + A)(a_i + a_k) + y\}(a_j + a_k)](a_i + a_j);$$

this last expression is in $L_{ij}$ along with $x \times y$, and hence $= x \times y$ by the indivisibility of inverses. Hence:

$$[(x \times y) + c_{ik}](a_j + a_k) = [(c_{ij} + A)(a_i + a_k) + y](a_i + a_k) \qquad \text{(AL), (ST), (ML),}$$

and so, using (4. 10.5),

$$w \times (x \times y) = [(w + c_{jk})(a_i + a_k) + ((x \times y) + c_{ij})(a_j + a_k)](a_i + a_j)$$
$$= [(w + c_{jk})(a_i + a_k) + \{(c_{ij} + A)(a_i + a_k) + y\}(a_j + a_k)](a_i + a_j).$$

Again,

$$(w \times x) \times y$$
$$= [((w \times x) + A)(a_i + a_k) + \{(c_{ij} + A)(a_i + a_k) + y\}(a_j + a_k)](a_i + a_j),$$

and, using (4. 11. 1) to express $w \times x$,

$$= [\{(w + c_{jk})(a_i + a_k) + A\}(a_i + a_k) + \{(c_{ij} + A)(a_i + a_k) + y\}(a_j + a_k)](a_i + a_j)$$
$$= [(w + c_{jk})(a_i + a_k) + A a_k + \{(c_{ij} + A)(a_i + a_k) + y\}(a_j + a_k)](a_i + a_j) \qquad \text{(ML)}$$
$$= [(w + c_{jk})(a_i + a_k) + \{(c_{ij} + A)(a_i + a_k) + y\}(a_j + a_k)](a_i + a_j) \qquad \text{(ST)}$$
$$= w \times (x \times y),$$

which establishes the associativity of multiplication.

**4. 12. The regularity of multiplication for inverses.** From §§ 4. 9, 4. 10, 4. 11 it follows that the elements of $L_{ij}$ under the multiplication $x \times y$ form a semi-group with unit.

We shall now show that the multiplication is regular (see § 3. 1 for definition of regularity). For this purpose we associate with each $x$ in $L_{ij}$ a lattice element $x^r$ which we shall call the *reach of* $x$, defined as

$$x^r = (x + a_i)a_j.$$

We shall prove below:

(4. 12. 1) *For every* $b \leqq a_j$ *and* $d = [a_j - b]$ *there is an* $e$ *in* $L_{ij}$ *with* $e \times e = e$, $e^r = b$, $(c_{ij} - e)^r = d$.

(4. 12. 2) *For* $x, y$ *in* $L_{ij}$ *there is a* $w$ *with* $w \times x = y$ *if and only if* $x^r \geqq y^r$.

From (4. 12. 1) it will follow that there is an idempotent $e$ with $e^r = x^r$ and hence from (4. 12. 2), for suitable $y$ and $w$ in $L_{ij}$, $y \times e = x$ and $w \times x = e$. From the associativity of multiplication for inverses, this implies

$$x \times w \times x = x \times e = (y \times e) \times e = y \times e = x,$$

which shows that the multiplication is regular.

We note that this will also show:

(4. 12. 3) *The correspondence* $(x)_l \to x^r$ *sets up a* $(1, 1)$ *order preserving mapping between the set of all left cosets of* $L_{ij}$ *and the lattice* $L(a_j)$.

(4. 12. 3) implies that the cosets $(x)_l$ form a complemented modular lattice under the relation of inclusion.

Proof of (4. 12. 1): Set $e = (b + a_i)(d + c_{ij})$. Then $e$ can be expressed as $e = ea_i + ec_{ij}$. This $e$ is in $L_{ij}$ since:

$$\begin{aligned} ea_j &= (b + a_i)(d + c_{ij})a_j = (b + a_i a_j)(d + c_{ij} a_j), \quad \text{using } b, d \leqq a_j, \text{(ML)} \\ &= bd = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e + a_j &= (b + a_i)(d + c_{ij}) + b + d \\ &= (b + a_i + d)(b + d + c_{ij}) && \text{(AL)} \\ &= (a_i + a_j)(a_i + a_j) = a_i + a_j. \end{aligned}$$

This $e$ satisfies the requirements of (4. 12. 1), for using (4. 10. 5) and (ML),

$$\begin{aligned} e \times e &= ea_i + [(ec_{ij} + c_{jk})(a_i + a_k) + (e + c_{ik})(a_k + a_j)](a_i + a_j) \\ &= ea_i + [(ec_{ij} + c_{jk})c_{ik} + (e + c_{ik})(a_k + a_j)](a_i + a_j) && \text{(ST)} \\ &= ea_i + (e + c_{ik})[(ec_{ij} + c_{jk})c_{ik} + a_k + a_j](a_i + a_j) && \text{(AL)} \\ &= ea_i + e[(ec_{ij} + c_{jk})(a_i + a_k) + a_k + a_j] && \text{(ML)} \\ &= ea_i + e(ec_{ij} + c_{jk} + a_k)(a_i + a_j + a_k) && \text{(AL)} \\ &= ea_i + ec_{ij} = e && \text{(ST), (ML).} \end{aligned}$$

Next,

$$e_j^r = [(b + a_i)(d + c_{ij}) + a_i]a_j = (b + a_i)(a_i + a_j)a_j = b.$$

Finally, since (4. 7. 1) implies that $(x - y)^r = (x + y)a_j$ for all $x, y$ in $L_{ij}$,

$$(c_{ij} - e)^r = (c_{ij} + e)a_j = [c_{ij} + (b + a_i)(d + c_{ij})]a_j = d.$$

This completes the proof of (4. 12. 1).

Proof of (4. 12. 2): Because of the indivisibility of inverses, $w\times x=y$ is equivalent to $w\times x\leqq y$, and this in turn is equivalent to:

$$(4.12.4)\qquad (w\times x)+(x+c_{ik})\,(a_j+a_k)\leqq y+(x+c_{ik})\,(a_j+a_k)$$

(clip to both sides of (4. 12. 4) by $(a_i+a_j)$ to derive $w\times x\leqq y$). Now (4. 12. 4) is equivalent (use (4. 10. 5) to express $w\times x$) to:

$$(w+c_{jk})\,(a_i+a_k)+(x+c_{ik})\,(a_j+a_k)\leqq y+(x+c_{ik})\,(a_j+a_k)\qquad \text{(AL), (ST)}$$

hence to:

$$(w+c_{jk})\,(a_i+a_k)\leqq y+(x+c_{ik})\,(a_j+a_k);$$

hence to:

$$(4.12.5)\qquad (w+c_{jk})\,(a_i+a_k)\leqq [y+(x+c_{ik})\,(a_j+a_k)]\,(a_i+a_k);$$

hence to

$$(4.12.6)\quad (w+c_{jk})\,(a_i+a_k)+c_{jk}\leqq [y+(x+c_{ik})\,(a_j+a_k)]\,(a_i+a_k)+c_{jk}$$

(clip both sides of (4. 12. 6) by $a_i+a_k$ to recover (4. 12. 5)); hence to:

$$(4.12.7)\qquad w\leqq [y+(x+c_{ik})\,(a_j+a_k)]\,(a_i+a_k)+c_{jk}.$$

Now the right side of (4. 12. 7) $\geqq$ some $w$ in $L_{ij}$ if and only if:

$$(4.12.8)\qquad \text{(right side of (4.12.7))}+a_j\geqq a_i+a_j$$

(if (4. 12. 8) holds, $w$ may be chosen as

$$w=[(\text{right side of (4.12.7)})\,(a_i+a_j)\;-\;\text{right side of (4.12.7)})a_j]).$$

Thus $w\times x=y$ for some $w$ in $L_{ij}$ if and only if:

$$(y+(x+c_{ik})\,(a_j+a_k)]\,(a_i+a_k)+c_{jk}+a_j\geqq a_i+a_j.$$

This last condition is equivalent to each of the following:

$$(4.12.9)\qquad y+(x+a_i+a_k)(a_j+a_k)\geqq a_i,$$
$$(4.12.10)\qquad y+(x+a_i+a_k)a_j\geqq a_i,$$
$$(4.12.11)\qquad y+(x+a_i)a_j\geqq y+a_i,$$
$$(4.12.12)\qquad (x+a_i)a_j\geqq (y+a_i)a_j,$$

(clip both sides of (4. 12. 11) by $a_j$ to obtain (4. 12. 12); add $y$ to both sides of (4. 12. 12) to recover (4. 12. 11)). This completes the proof of (4. 12. 2) and establishes the regularity of multiplication.

We note that $(a_i)^r=(a_i+a_j)\,a_j=0$ and hence using (4. 12. 2), $x^r=0$ if and only if $x=a_i$.

We shall now prove that the idempotent $e$ of (4. 12. 1) is uniquely determined by $b$ and $d$. First we prove:

(4.12.13) *If* $b \oplus d = a_j$, *then* $(b+a_i)(d+c_{ij})$ *is an idempotent* $e$ *in* $L_{ij}$ *such that* $e^r = b$, $(c_{ij}-e)^r = d$; *conversely, if* $e$ *is an idempotent, and if* $b = e_r$, $d = (c_{ij}-e)^r$, *then* $b \oplus d = a_j$ *and* $e = (b+a_i)(d+c_{ij}) = = ea_i + ec_{ij}$.[11])

Proof of (4.12.13). The "if" part was shown in the proof of (4.12.1). To establish the "only if" part we assume $e$ to be idempotent; that is, using (4.10.5):

$$e = [(e+c_{ik})(a_k+a_j) + (e+c_{kj})(a_i+a_k)](a_i+a_j).$$

Now

(4.12.16) $$e \geqq c_{ij}(e+a_i).$$

For

$$\begin{aligned} e = e+e \quad & \text{(lattice union, not to be confused with } e \dotplus e) \\ = [e+c_{ik}+(e+c_{kj})(a_i+a_k)](a_i+a_j) \quad & \text{(AL), (ST)} \\ \geqq [c_{ik}+c_{kj}(e+a_i+a_k)](a_i+a_j) \geqq c_{ij}(e+a_i). & \end{aligned}$$

Since $(x-y)^r = (x+y)a_j$, therefore $b = (e+a_i)a_j$ and $d = (c_{ij}+e)a_j$. Hence:

$$b+d = (e+a_i)a_j + (c_{ij}+e)a_j = [e+a_i+(c_{ij}+e)a_j]a_j = (e+a_i+c_{ij})a_j = a_j;$$

$$bd = (e+a_i)(c_{ij}+e)a_j = [e+c_{ij}(e+a_i)]a_j = 0, \qquad \text{using (4.12.16);}$$

$$(b+a_i)(d+c_{ij}) = (e+a_i)(e+c_{ij}) = e+c_{ij}(e+a_i) = e, \qquad \text{using (4.12.16).}$$

This completes the proof of (4.12.13). The uniqueness of the idempotent $e$ in (4.12.1) follows since (4.12.13) shows that an idempotent $e$ is determined by $e^r$ and $(c_{ij}-e)^r$.

**4.13. Invariance of $\times$ under the perspectivities** $P$. Suppose $x, y$ are in $L_{ij}$. We shall show, assuming (4.10.3)[12]):

(4.13.1) $$P(x \times y) = (Px) \times (Py) \text{ with } P = P_{ik;ij} \qquad \text{(see § 4.1);}$$

(4.13.2) $$P(x \times y) = (Px) \times (Py) \text{ with } P = P_{kj;ij}.$$

[11]) If $a_i$ is an atom, clearly the only idempotents in $L_{ij}$ are the zero $a_i$ and the unit $c_{ij}$.

[12]) Note that the abelian group character of the $L_{ij}$ under $\dotplus$ and their group-isomorphism under the perspectivities $P$ follow from the assumption (4.3.2) alone (in this connection see footnote 19); the semi-group character of the $L_{ij}$ under $\times$, the regularity of $\times$, and (4.13.2) follow from the assumption (4.10.2) alone. However our proof of (4.13.1) requires the additional assumption (4.10.3) and our proofs of distributivity (4.14.1) and (4.14.2) require the additional assumptions (4.3.4) and (4.3.3) respectively; whether some or all of these additional conditions (4.3.3), (4.3.4) and (4.10.3) are actually implied by (4.3.2) and (4.10.2) is not known but it is not difficult to verify, assuming only (4.3.2) and (4.10.2), that: the distributivity (4.14.1) holds in the case that $w$ is an idempotent or $wa_i = 0$, and the distributivity (4.14.2) holds in the case that $w$ is an idempotent or $w + a_i = a_i + a_j$.

Proof of (4. 13. 1). We may obtain an element $\geqq x \times y$ from (4. 10. 3) with $A = (P_{k:j} y + c_{ij})(a_k + a_j)$ and $B = a_k$ for these $A, B$ satisfy the conditions (4. 9. 1) and (4. 9. 2) (this follows from the fact that $A$ is in $L_{jk}$ and $A + B = a_j + a_k$). We obtain:

$$\begin{aligned} x \times y &\leqq [(x+A)(a_i+a_k) + \{(c_{ij}+A)(a_i+a_k)+y\}(a_j+a_k)](a_i+a_j) \\ &= [(x+A)(a_i+a_k) + (P_{k:j}y+y)(a_j+a_k)](a_i+a_j) && \text{(AL), ST)} \\ &= [(x+A)(a_i+a_k) + (y+c_{jk})(y+a_i+a_k)(a_j+a_k)](a_i+a_j) && \text{(AL)} \\ &= [(x+A)(a_i+a_k) + c_{jk}(y+a_i+a_k)(a_j+a_k)](a_i+a_j) && \text{(ML)} \\ &\leqq [(x+A)(a_i+a_k)+c_{jk}](a_i+a_j). \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} P_{k:j}(x \times y) &\leqq (x+A)(a_i+a_k) \\ &= [x + (P_{k:j}y + c_{ij})(a_k+a_j)](a_i+a_k) \\ &= P_{k:j}x \times P_{k:j}y \end{aligned}$$

using (4. 10. 5) with $j$ and $k$ interchanged to express $P_{k:j}x \times P_{k:j}y$. The indivisibility of inverses now shows that equality holds in (4. 13. 1).

Proof of (4. 13. 2). We may express $x \times y$ by (4. 9. 4) with $A = P_{k:i}x$ and $B = a_k$ for these $A$, $B$ satisfy the conditions (4. 9. 1), (4. 9. 2), (4. 9. 3) (this follows from the fact that $A$ and $B$ are both in $L_{kj}$ and

$$x + A + B = x + c_{ik} + a_k = x + a_i + a_k \geqq a_i).$$

We obtain:

$$\begin{aligned} x \times y &= [(x+c_{ik})(a_i+a_k) + \{(c_{ij}+P_{k:i}x)(a_i+a_k)+y\}(a_j+a_k)](a_i+a_j) \\ &\geqq [c_{ik} + \{(c_{ij}+P_{k:i}x)(a_i+a_k)+y\}(a_j+a_k)](a_i+a_j). \end{aligned}$$

$$P_{k:i}(x \times y) \geqq [(c_{ij}+P_{k:i}x)(a_i+a_k)+y](a_k+a_j) = P_{k:i}x \times P_{k:i}y$$

using (4. 10. 5) with $i$ and $k$ interchanged to express $P_{k:i}x \times P_{k:i}y$. The indivisibility of inverses now shows that equality holds in (4. 13. 2).

**4. 14. The distributivity of $\times$ with respect to $\dotplus$.** Suppose $w, x, y$ are in $L_{ij}$. We shall show, assuming (4. 3. 3) and (4. 3. 4)[12]):

(4. 14. 1) $$w \times (x \dotplus y) = (w \times x) \dotplus (w \times y);$$

(4. 14. 2) $$(x \dotplus y) \times w = (x \times w) \dotplus (y \times w).$$

Proof of (4. 14. 1). We may obtain an element $\leqq P_{k:i}x \dotplus P_{k:i}y$ from (4. 4. 9) (which in turn is derived from (4. 3. 4)) with $i$ and $k$ interchanged, using $q = w \times y$ and $p = (q + a_k)(P_{k:j}w + a_j)$, for these $p, q$ satisfy the relevant conditions (4. 4. 2) and (4. 4. 3) with $i$ and $k$ interchanged; this follows from the fact that $q$ is in $L_{ij}$ and

$$p(a_k + a_j) = a_k(P_{k:j}w + a_j) = (w + c_{jk})a_k = 0 \leqq P_{k:i}x.$$

We obtain:

(4. 14. 13) $P_{k:i}x \dot{+} P_{k:i}y \geqq [(p+P_{k:i}x)(a_i+a_j)+(q+P_{k:i}y)\, P_{k:j}w+a_j)]\,(a_k+a_j)$.

Now, using (4. 10. 5) with $w$ in place of $x$,

$$q+P_{k:i}y=(w\times y)+P_{k:i}y=(P_{k:j}w+P_{k:i}y)\,(a_i+a_j)+P_{k:i}y=P_{k:j}w+P_{k:i}y.$$

Now from (4. 14. 3), since $P(x\dot{+}y)=Px\dot{+}Py$ (from (4. 8. 2)),

$$P_{k:i}(x\dot{+}y)\geqq[(p+P_{k:i}x)\,(a_i+a_j)+P_{k:j}w]\,(a_k+a_j).$$

Hence, using (4. 10. 5) with $w$ in place of $x$ and $x\dot{+}y$ in place of $y$,

$$\begin{aligned} w\times(x\dot{+}y) &= [P_{k:j}w+P_{k:i}(x\dot{+}y)]\,(a_i+a_j)\\ &\geqq [P_{k:j}w+\{(p+P_{k:i}x)\,(a_i+a_j)+P_{k:j}w\}\,(a_k+a_j)]\,(a_i\dot{+}a_j)\\ &= [(p+P_{k:i}x)\,(a_i+a_j)+P_{k:j}w]\,(a_i+a_j) \qquad \text{(AL), (ST)}\\ &\geqq (p+P_{k:i}x)\,(a_i+a_j)\\ &= [((w\times y)+a_k)P_{k:j}w+a_j)+P_{k:i}x]\,(a_i+a_j). \end{aligned}$$

Now we may calculate $(w\times x)\dot{+}(w\times y)$ from (4. 4. 6) with $(w\times x)$ in place of $x$ and $(w\times y)$ in place of $y$, using $p=P_{k:j}w$ and $q=a_k$, for these $p, q$ satisfy the relevant conditions (4. 4. 1), (4. 4. 2), and (4. 4. 3); indeed, $p$ is in $L_{ik}$ and

$$p(a_i+a_j)\leqq(P_{k:j}w+P_{k:i}x)\,(a_i+a_j)=w\times x.$$

We obtain:

$$\begin{aligned} &(w\times x)\dot{+}(w\times y)\\ &\quad=[(P_{k:j}w+a_j)\,((w\times y)+a_k)+(P_{k:j}w+(w\times x))\,(a_k+a_j)]\,(a_i+a_j). \end{aligned}$$

Now, using (4. 10. 5) with $w$ in place of $x$, $x$ in place of $y$,

$$P_{k:j}w+(w\times x)\leqq P_{k:j}w+P_{k:i}x;$$

$$(P_{k:j}w+(w\times x))\,(a_k+a_j)\leqq P_{k:i}x+P_{k:j}w(a_k+a_j)=P_{k:i}x.$$

Then

$$\begin{aligned} (w\times x)\dot{+}(w\times y) &\leqq [(P_{k:j}w+a_j)\,((w\times y)+a_k)+P_{k:i}x]\,(a_i+a_j)\\ &\leqq w\times(x\dot{+}y). \end{aligned}$$

Now the indivisibility of inverses shows that equality holds in (4. 14. 1).

Proof of (4. 14. 2). We may obtain an element $\geqq P_{k:j}x\dot{+}P_{k:j}y$ from (4. 3. 3) with $j$ and $k$ interchanged, using $A=P_{k:i}w$ and $B=a_j$; for these $A$, $B$ satisfy the relevant conditions (4. 2. 1) and (4. 2. 2) with $j$ and $k$ interchanged ($A$ is in $L_{kj}$). We obtain:

$$\begin{aligned} \text{(4. 14. 4)} \quad P_{k:j}(x\dot{+}y) &= P_{k:j}x\dot{+}P_{k:j}y\\ &\leqq [(P_{k:j}x+P_{k:i}w)\,(a_i+a_j)+a_k]\,(P_{k:j}y+a_j)+P_{k:i}w\\ &\leqq ((x\times w)+a_k)\,(P_{k:j}y+a_j)+P_{k:i}w. \end{aligned}$$

Hence, using (4. 10. 5) with $x \dotplus y$ in place of $x$ and $w$ in place of $y$,

$$(x \dotplus y) \times w = [P_{k:j}(x \dotplus y) + P_{k:i} w]\,(a_i + a_j)$$
$$\leqq [((x \times w) + a_k)\,(P_{k:j} y + a_j) + P_{k:i} w]\,(a_i + a_j).$$

The inequality implies equality because of the indivisibility of inverses (the last member is easily shown to be in $L_{ij}$). Therefore

(4. 14. 5) $\quad (x \dotplus y) \times w = [((x \times w) + a_k)\,(P_{k:j} y + a_j) + P_{k:i} w]\,(a_i + a_j).$

Now we may calculate $(y \times w) \dotplus (x \times w)$ from (4. 4. 6) with $y \times w$ in place of $x$ and $x \times w$ in place of $y$, using $p = P_{k:j} y$ and $q = a_k$; for these $p, q$ satisfy the relevant conditions (4. 4. 1), (4. 4. 2) and (4. 4. 3); indeed, $p$ is in $L_{ik}$ and

$$p(a_i + a_j) \leqq (P_{k:j} y + P_{k:i} w)\,(a_i + a_j) = y \times w.$$

We obtain:

$$(y \times w) \dotplus (x \times w)$$
$$= [(P_{k:j} y + a_j)\,((x \times w) + a_k) + (P_{k:j} y + (y \times w))\,(a_k + a_j)]\,(a_i + a_j).$$

Now using (4. 10. 5) with $y$ in place of $x$ and $w$ in place of $y$,

$$P_{k:j} y + (y \times w) \leqq P_{k:j} y + P_{k:i} w;$$
$$(P_{k:j} y + (y \times w))(a_k + a_j) \leqq P_{k:i} w + P_{k:j} y(a_k + a_j) = P_{k:i} w.$$

Then

$$(y \times w) \dotplus (x \times w) \leqq [(P_{k:j} y + a_j)((x \times w) + a_k) + P_{k:i} w](a_i + a_j).$$

Now (4. 14. 5), the indivisibility of inverses and the commutativity of $\dotplus$ show that equality holds in (4. 14. 2).

This completes the proof that $\times$ is distributive with respect to $\dotplus$.

Thus, under the operations $\dotplus$ and $\times$ the $L_{km}$ become regular rings with unit if the two conditions (4. 3. 3), (4. 3. 4) hold for all pairs $i$, $j$. If in addition (4. 10. 3) holds, §§ 4. 8, 4. 13 show that the mappings $P_{kj:ij}$, $P_{ik:ij}$ yield ring isomorphisms of $L_{ij}$ onto $L_{kj}$, $L_{ik}$ respectively, so that as regular rings, the $L_{km}$ are all isomorphic.

This, together with (4. 12. 3), establishes:

(4. 14. 6) *Parts* (i) *and* (ii) *of the von Neumann coordinatization theorem hold if* $n > 3$ *or if* $n = 3$ *and* $L$ *possesses a normalized frame satisfying* (4. 3. 3), (4. 3. 4) *and* (4. 10. 3).

**4. 15. Fraternal systems, *L*-numbers, upper semi-fraternal systems and upper semi-*L*-numbers.** A *fraternal system* is defined to be a set of lattice elements $\langle b \rangle = \langle b_{ij} \rangle = \langle b_{ij};\ i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j \rangle$ satisfying (i) $b_{ij} \leqq a_i + a_j$, (ii) $P_{kj:ij} b_{ij} = b_{kj}$ and (iii) $P_{ik:ij} b_{ij} = b_{ik}$ for all $i, j, k$. A lattice element $x$ is called an *$(i, j)$ fraternal element* if there is a fraternal system $\langle b \rangle$ with $b_{ij} = x$ (if such a $b$ exists it is clearly uniquely determined by $x$).

An *upper semi-fraternal system* is defined to be a set of lattice elements $\langle b \rangle = \langle b_{ij} \rangle = \langle b_{ij};\ i, j = 1, \dots, n, i > j \rangle$ satisfying (i) $b_{ij} \leqq a_i + a_j$, (ii) $P_{kj:ij} b_{ij} = b_{kj}$ with both $i > j, k > j$, (iii) $P_{ik:ij} b_{ij} = b_{ik}$ with both $i > j$, $i > k$ (the mappings $P$ in (ii) and (iii) are non-crossing according to the definition in § 4. 1).

Suppose $\langle b \rangle$ is a fraternal system or an upper semi-fraternal system; then: if $b_{ij} \leqq a_i$ for some $i, j$ it follows from the definition of $P_{ik:ij}$ that this holds for all $i, j$ and $b_{ij}$ is independent of $j$; similarly if $b_{ij} \leqq a_j$ for some $i, j$ then it follows from the definition of $P_{kj:ij}$ that this holds for all $i, j$ and $b_{ij}$ is independent of $i$; finally, if $b_{ij}$ is in $L_{ij}$ for some $i, j$ it is clear that this holds for all $i, j$.

Fraternal systems $\langle b \rangle$ with $b_{ij}$ in $L_{ij}$ will be called *$L$-numbers*; upper semi-fraternal systems $\langle b \rangle$ with $b_{ij}$ in $L_{ij}$ will be called *upper semi-$L$-numbers*. If $\beta$ denotes an $L$-number or an upper semi-$L$-number $\langle b \rangle$ we shall sometimes write $\beta_{ij}$ to mean $b_{ij}$.

If $\alpha$ and $\beta$ are both $L$-numbers we define $\alpha + \beta$ to be the system $\langle b \rangle$ with $b_{ij} = \alpha_{ij} \dot{+} \beta_{ij}$ for all $i \neq j$ and $\alpha\beta$ to be the system $\langle b \rangle$ with $b_{ij} = \alpha_{ij} \times \beta_{ij}$ for all $i \neq j$. It is clear from §§ 4. 8, 4. 13 that $\alpha + \beta$ is an $L$-number and if (4. 10. 3) holds, then $\alpha\beta$ is also an $L$-number. Subtraction is defined for $L$-numbers with $\alpha - \beta = \langle \alpha_{ij} - \beta_{ij};\ i, j = 1, \dots, n,\ i \neq j \rangle$ (the last paragraph of § 4. 8 shows that this system is an $L$-number since subtraction of inverses is invariant under the perspectivities $P$). Finally the $L$-numbers form a ring $\mathfrak{R}'$ with two-sided unit $1 = \langle b; b_{ij} = c_{ij}$ for all $i \neq j \rangle$ if (4. 3. 3), (4. 3. 4) and (4. 10. 3) hold.

Similarly if (4. 3. 3), (4. 3. 4) and (4. 10. 3) hold the upper semi-$L$-numbers form a ring $\mathfrak{R}$ with two-sided unit; that $\mathfrak{R}$ is regular and ring-isomorphic to every $L_{ij}$ will be shown in (4. 15. 5) below.

*The regular ring $\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{R}(a_i, c_{ij}; i, j = 1, \dots, n,\ i \neq j)$ will be called an auxiliary ring for the lattice $L$*[13]).

---

[13]) It follows easily from the definitions of $\dot{+}$ and $\times$ that $\mathfrak{R}$ (the *abstract* ring) is completely determined by any *three* elements of the homogeneous basis, thus $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(a_1, a_2, a_3)$. To what extent $\mathfrak{R}$ is completely determined by $L$ (of order $n$) is not yet known. However it was shown by von Neumann [7, vol. 23, page 20, line 38; 8, vol. II, Theorem 4. 2] that $\mathfrak{R}_n$, the regular ring of all $n \times n$ matrices with elements in $\mathfrak{R}$, is uniquely determined by $L$. It is not difficult to show that if $L$, of order $n$, has an auxiliary ring which is a *field* (footnote 11 implies that this occurs if $L$ is *a* projective geometry and the $a_i$ are points) then the auxiliary ring (corresponding to this order $n$) is uniquely determined.

If $\langle b_{km};\ k \neq m\rangle$ is a fraternal system and $\langle d_{km};\ k > m\rangle$ is an upper semi-fraternal system and if $b_{ij} = d_{ij}$ for some $i > j$, then clearly $b_{ij} = d_{ij}$ for all $i > j$. Also every fraternal system $\langle b_{ij}\rangle$ when restricted to $i > j$ clearly gives a semi-fraternal system and we shall identify these when there is no possibility of confusion. Then $\mathfrak{R}'$ becomes a subring of $\mathfrak{R}$. Actually it will follow as a consequence of the coordinatization theorem (§ 1. 1) that $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}$ (in the case $n \geqq 4$ the equality $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}$ follows directly from the lemma of VON NEUMANN, (4. 15. 2) below).

We shall show below:

(4. 15. 1) *Let $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ be a lattice polynomial in $x_1, \ldots, x_r$ and let $\varphi(y_{1,ij}, \ldots, y_{r,ij}) = y_{ij}$. If the $\langle y_{m,ij};\ i > j\rangle$ are all upper semi-fraternal systems, then so is $\langle y_{ij};\ i > j\rangle$; if the $\langle y_{m,ij};\ i \neq j\rangle$ are all fraternal systems, then so is $\langle y_{ij};\ i \neq j\rangle$.*

(4. 15. 2) *Lemma of von Neumann* [7, vol. II, lemma 6. 1]: *If $n \geqq 4$, then for each $x \leqq a_i + a_j$ for some $i \neq j$, there is one and only one fraternal system $\langle b\rangle$ with $b_{ij} = x$ (that is $x$ is an $(i, j)$ fraternal element).*

(4. 15. 3) *If $x \leqq a_i + a_j$ for some $i > j$ then there is one and only one upper semi-fraternal system $\langle b\rangle$ with $b_{ij} = x$.*

(4. 15. 4) *Every $x \leqq$ some $a_i$ or some $c_{ij}$ is an $(i, j)$ fraternal element.*

(4. 15. 2) was used by VON NEUMANN as a technical aid for proving the coordinatization theorem for the case $n \geqq 4$. For this case VON NEUMANN showed that the $L$-numbers form a regular ring with unit and he proved the coordinatization theorem using coordinates from this ring.

In the present paper we shall establish the coordinatization theorem for the general complemented modular lattice with $n \geqq 3$ (assuming the Desarguesian-type conditions (4. 3. 3), (4. 3. 4), (4. 10. 3) for the case $n = 3$) by using as a technical aid the apparently weaker lemma (4.15. 3) and using coordinates from the regular ring of all upper semi-$L$-numbers.

P r o o f o f (4. 15. 1). This holds since lattice union and lattice intersection are preserved under the perspective mappings $P$.

P r o o f o f (4. 15. 2). We need only prove, assuming $n \geqq 4$: if $T \equiv T_{km:ij}$ $(i \neq j, k \neq m)$ is the product of an ordered sequence of $s$ perspective mappings $P$ such that $T$ maps $L(a_i + a_j)$ onto $L(a_k + a_m)$ and $T(a_i) = a_k$ (such $T$ exist) then $T$ is uniquely determined by $i, j, k, m$ ((4. 15. 2) then follows by setting $b_{km} = T_{km:ij}x$ for all $k \neq m$).

To verify the general uniqueness of such $T$ it is clearly sufficient to confirm that, in the case $i = k$ and $j = m$, $T$ cannot fail to be the identity mapping. If it could, we would choose $s$ to have its least possible value to give such a $T$ different from the identity and derive a contradiction as follows.

Easy calculations, using the modular law, establish the identities:

(i) $P_{kj:hj}P_{hj:ij} = P_{kj:ij}$ if all of $i, h, k \neq j$,

equivalently, $P_{ik:ih}P_{ih:ij} = P_{ik:ij}$ if all $j, h, k \neq i$;

(ii) $P_{km:kj}P_{kj:ij} = P_{km:im}P_{im:ij}$ if $i, j, k, m$ are all different.

It may therefore be supposed (since $s$ has its least value) that the sequence of mappings which defines $T$ begins:

$$\ldots P_{mr:mk}P_{mk:hk}P_{hk:hj}P_{hj:ij}$$

(necessarily: $h \neq i$; $k \neq h, j$).

If $k \neq i$ so that $i, j, h, k$ are all different, we can, without changing $T$, replace $P_{hk:hj}P_{hj:ij}$ by $P_{hk:ik}P_{ik:ij}$; then we can replace $P_{mk:hk}P_{hk:ik}$ by $P_{mk:ik}$. This would express $T$ as a product of fewer than $s$ mappings. Therefore we must have $k = i$.

The same argument shows that $m = j$ and that $T$ is defined by mappings beginning:

$$\ldots P_{jr:ji}P_{ji:hi}P_{hi:hj}P_{hj:ij}.$$

Since $n \geqq 4$, there is an integer $t$ such that $i, j, h, t$ are all different. Then we may replace $P_{hi:hj}$ by $P_{hi:ht}P_{ht:hj}$; then $P_{ht:hj}$; $P_{hj:ij}$ by $P_{ht:it}P_{it:ij}$; then $P_{ji:hi}P_{hi:ht}$ by $P_{ji:jt}P_{jt:ht}$; then we may replace $P_{jt:ht}P_{ht:it}$ by $P_{jt:it}$; then $P_{jr:ji}P_{ji:jt}$ by $P_{jr:jt}$. $T$ will now be expressed by fewer than $s$ mappings; this contradiction establishes (4. 15. 2).

P r o o f o f (4. 15. 3). We need only prove: if $T = T_{km:ij}$ $(i > j, k > m)$ is the product of an ordered sequence of $s$ *non-crossing* perspective mappings $P$ such that $T$ maps $L(a_i + a_j)$ onto $L(a_k + a_m)$ and $T(a_i) = a_k$, then $T$ is uniquely determined by $i, j, k, m$ ((4. 15. 3) then follows by setting $b_{km} = T_{km:ij}x$ for all $k > m$).

To verify the general uniqueness of such $T$ it is clearly sufficient to confirm that, in the case $k = i$, $m = j$, $T$ cannot fail to be the identity mapping. If it could, we would choose $s$ to have its least possible value to give such a $T$ different from the identity and derive a contradiction as follows.

When $n \geqq 4$, (4. 15. 3) is implied by (4. 15. 2), hence we may assume that $n = 3$, so that there are 3 different indices $i, j, k$. The sequence of *non-crossing* mappings which defines $T$ must begin:

$$\ldots P_{kj:ki}P_{ki:kj}P_{kj:ij}.$$

But $P_{kj:ki}P_{ki:kj}$ is the identity and can be omitted, contradicting the minimum character of $s$. This completes the proof of (4. 15. 3).

Proof of (4.15.4). Because of (4.15.2), we may assume $n=3$. Now if $x \leqq a_i$, we need only note that $P_{kj:ij}x \leqq a_k$ and hence:

$$P_{ji:ki}P_{ki:kj}P_{kj:ij}x = P_{ji:ki}(x+c_{ik})(a_k+a_j) = (x+c_{ij})a_j;$$
$$P_{ji:jk}P_{jk:ik}P_{ik:ij}x = P_{jk:ik}x = P_{ji:ki}P_{ki:kj}P_{kj:ij}x.$$

If $x \leqq c_{ij} = c_{ji}$, we need only note that:

$$P_{ji:ki}P_{ki:kj}P_{kj:ij}x = P_{ji:ki}P_{ki:kj}(x+c_{ik})c_{kj}$$
$$= P_{ji:ki}[(x+c_{ik})c_{kj}+c_{ij}+x](a_i+a_k) = P_{ji:jk}P_{jk:ik}P_{ik:ij}x.$$

From (4.15.3) and the definitions of addition and multiplication for upper semi-$L$-numbers, it follows at once that:

(4.15.4) *$\mathfrak{R}$ is a regular ring with unit, isomorphic to every $L_{ij}$.*

## 5. Properties of the auxiliary ring.

**5.1. Addition and multiplication formulae for elements in $\mathfrak{R}$.** For future reference we list the following formulae:

(5.1.1) $(\alpha+\beta)_{ij} = [P_{kj:ij}\alpha_{ij}+(\beta_{ij}+a_k)(c_{ik}+a_j)](a_i+a_j)$, if $i>j,\ i\neq k\neq j$;
$\qquad = [\alpha_{kj}+(\beta_{ij}+a_k)(c_{ik}+a_j)](a_i+a_j)$, if $i>j,\ i\neq k>j$.

(5.1.2) $(\alpha+\beta)_{ij} = [(P_{ik:ij}\alpha_{ij}+a_j)(\beta_{ij}+a_k)+c_{jk}](a_i+a_j)$, if $i>j,\ i\neq k\neq j$;
$\qquad = [(\alpha_{ik}+a_j)(\beta_{ij}+a_k)+c_{jk}](a_i+a_j)$, if $i>j,\ i>k\neq j$.

(5.1.3) $(\alpha-\beta)_{kj} = [\alpha_{ij}+(a_k+\beta_{ij})(a_j+c_{ik})](a_k+a_j)$, if $i>j,\ k>j,\ i\neq k$.

(5.1.4) $(\alpha\beta)_{ij} = (P_{ik:ij}\alpha_{ij}+P_{kj:ij}\beta_{ij})(a_i+a_j)$, if $i>j,\ i\neq k\neq j$;
$\qquad = (\alpha_{ik}+\beta_{kj})(a_i+a_j)$, if $i>k>j$.

Such formulae were first given by VON NEUMANN [8, vol. II] and follow immediately from (4.4.7), (4.3.5), (4.7.1), (4.10.5).

**5.2. An important identity.** Suppose that $1<j<i\leqq n$ and let $\delta^m$ and $\theta^m$, $m=1,\ldots,j-1$ and $\beta$ be arbitrary elements in $\mathfrak{R}$. We shall now prove that the following identity holds[14, 15]:

(5.2.1)
$$\prod_{m=1}^{j-1}[(\delta^m+\beta\theta^m)_{im}+A_m^{j-1}]$$
$$=\Big[(\beta_{ij}+A^{j-1})\prod_{m=1}^{j-1}(\delta^m_{im}+A^j_m)+\prod_{m=1}^{j-1}(\theta^m_{jm}+A^{j-1}_m)\Big](A^{j-1}+a_i).$$

[14]) (5.2.1) was established in [2, § 5] for the case $n\geqq 4$. The present proof holds for $n\geqq 3$ assuming (4.3.3), (4.3.4) and (4.10.3). The identity (5.2.1) makes possible a simple proof that the module which we shall assign to an $x$ in $L$ (see § 6.2) is uniquely determined by $x$ (Theorem (6.2.5)). This is a critical step in the proof of the coordinatization theorem as given in the present paper.

[15]) As defined in § 4.1,

$$A^0=0;\ A^i=a_1+\cdots+a_i;\ A^i_j=a_1+\cdots+a_{j-1}+a_{j+1}+\cdots+a_i.$$

To prove this identity we shall first establish that for arbitrary indices $1 \leqq m < j < i \leqq n$ and arbitrary $\delta, \beta, \theta$ in $\mathfrak{R}$,

$$(\delta + \beta\theta)_{im} = [\theta_{jm} + (\delta_{im} + a_j)(\beta_{ij} + a_m](a_i + a_m). \tag{5.2.2}$$

We may calculate $(\beta\theta + \delta)_{im} = (\delta + \beta\theta)_{im}$ from (4.2.4) with $\beta\theta$ in place of $x$, with $\delta$ in place of $y$, with $j$ replaced by $m$ and using $A = \theta_{jm}$, $B = a_j$ (indeed, these $A, B$ satisfy the relevant formulae (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3) with $j$ replaced by $m$, since $A$ is in $L_{jm}$ and

$$a_i + A + B = a_i + a_j + \theta_{jm} \geqq (\beta_{ij} + \theta_{jm})(a_i + a_m) = (\beta\theta)_{im}$$

from (5.1.4) with $\beta$ in place of $\alpha$, $\theta$ in place of $\beta$). We obtain:

$$\begin{aligned}
(\beta\theta + \delta)_{im} &= \{[((\beta\theta)_{im} + \theta_{jm})(a_i + a_j) + a_m](a_j + \delta_{im}) + \theta_{jm}\}(a_i + a_m) \\
&= \{[(\beta_{ij} + \theta_{jm})(a_i + a_j) + a_m](a_j + \delta_{im}) + \theta_{jm}\}(a_i + a_m) \\
&= [(\beta_{ij} + \theta_{jm} a_j + a_m)(a_j + \delta_{im}) + \theta_{jm}](a_i + a_m) \\
&= [(\beta_{ij} + a_m)(a_j + \delta_{im}) + \theta_{jm} a_j + \theta_{jm}](a_i + a_m) \\
&= [(\beta_{ij} + a_m)(a_j + \delta_{im}) + \theta_{jm}](a_i + a_m).
\end{aligned}$$

This proves (5.2.2). It follows that (in the rest of § 5.2 we shall write $\Pi$ in place of $\prod_{m=1}^{j-1}$):

$$\begin{aligned}
\text{left side of (5.2.1)} &= \Pi[\{\theta^m_{jm} + (\delta^m_{im} + a_j)(\beta_{ij} + a_m)\}(a_i + a_m) + A^{j-1}_m] \\
&= (a_i + A^{j-1})\,\Pi[(\theta^m_{jm} + A^{j-1}_m) + (\delta^m_{im} + A^j_m)(\beta_{ij} + A^{j-1})] \\
&\geqq \text{right side of (5.2.1)}.
\end{aligned}$$

But each side of (5.2.1) is an inverse of $A^{j-1}$ in $a_i + A^{j-1}$ since, for:

$$\begin{aligned}
&A^{j-1}\,(\text{right side of (5.2.1)}) \leqq A^{j-1}(\text{left side of (5.2.1)}) = 0; \\
&a_i + A^{j-1} \geqq (\text{left side of (5.2.1)}) + A^{j-1} \\
&\qquad \geqq (\text{right side of (5.2.1)}) + A^{j-1} \\
&\qquad = (a_i + A^{j-1})\,[\Pi(\theta^m_{jm} + A^{j-1}) + (\beta_{ij} + A^{j-1})\,\Pi(\delta^m_{im} + A^j)] \\
&\qquad = a_i + A^{j-i}.
\end{aligned}$$

Now the indivisibility of inverses shows that equality holds in (5.2.1).

As a corollary to (5.2.1) we shall derive the following identity which holds for arbitrary $\beta^m$ and $\theta^m$, $m = 1, \ldots, j$, $j < i \leqq n$, and arbitrary $\gamma$:

$$\begin{aligned}
&[(\beta^j - \gamma)_{ij} + A^{j-1}]\,\Pi[(\beta^m + \gamma\theta^m)_{im} + A^j_m] + \Pi(\theta^m_{jm} + A^{j-1}_m) = \\
&\qquad = (\beta^j_{ij} + A^{j-1})\,\Pi(\beta^m_{im} + A^j_m) + \Pi(\theta^m_{jm} + A^{j-1}_m).
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

The right side of (5.2.3) is precisely the left side of (5.2.3) with 0 in place of $\gamma$. Thus we need only show that the left side of (5.2.3) has the same value for all $\gamma$, equal to its value when $\gamma = \beta^j$, say. It is therefore sufficient to prove:

(5. 2. 4) left side of (5. 2. 3) $= \Pi[(\beta^m + \beta^j\theta^m)_{im} + A_m^{j-1}] + \Pi(\theta_{jm}^m + A_m^{j-1})$.

Now (5. 2. 4) can be obtained by substituting in (5. 2. 1): $\beta^j - \gamma$ for $\beta$ and $\beta^m + \gamma\theta^m$ for $\delta^m$, $m = 1, \dots, j-1$ and adding the term $\Pi(\theta_{jm}^m + A_m^{j-1})$ to both sides.

**5. 3. Reach and nullity.** We shall define below, for each $\alpha$ in $\Re$, two fraternal systems which we shall call the *nullity* of $\alpha$ and *reach of* $\alpha$.

Suppose $\alpha$ is an upper semi-$L$-number and $i, j$ fixed, $i > j$. Lemmas (4. 15. 1) and (4. 15. 4) show that there exists a unique *fraternal* system $\langle b \rangle$ with $b_{ij} = \alpha_{ij} a_i$; since $\langle b \rangle$ is a fraternal system it follows from the definition of upper semi-fraternal systems that, for all $k > m$, $b_{km} = \alpha_{km} a_k$ and does not depend on $m$. Note: $b_{km}$ is defined for *all* $k \neq m$ although $\alpha_{km}$ is defined only for $k > m$. We shall call this fraternal system, to be denoted as $\alpha^0$, the *nullity* of $\alpha$; so that, if $i > 1$, $\alpha_i^0 = \alpha_{ij}\, a_i$ for all $j < i$ and if $\alpha$ is an $L$-number, then $\alpha_i^0 = \alpha_{ij}\, a_i$ for *all* $i \neq j$.

Similarly, lemmas (4. 15. 1) and (4. 15. 4) show that for each $\alpha$ in $\Re$, the system $b_{ij} = (\alpha_{ij} + a_i)\, a_j$, $i > j$ is an upper semi-fraternal system, which is part of a fraternal system. We shall call this fraternal system, to be denoted as $\alpha^r$, the *reach of* $\alpha$; so that, if $j < n$, $\alpha_j^r = (\alpha_{ij} + a_i) a_j$ for all $i > j$ and if $\alpha$ is an $L$-number, then $\alpha_j^r = (\alpha_{ij} + a_i)\, a_j$ for all $i \neq j$.[16])

We shall prove the following relations:

(5. 3. 1) *Every idempotent $e$ in $\Re$ is an $L$-number and for every decomposition $a = b \oplus d$, for some fixed $j$, there is a unique idempotent $e$ in $\Re$ with $e_j^r = b$ and $(1-e)_j^r = d$.*

(5. 3. 2) *For $\alpha, \beta$ in $\Re$ there is a $\gamma$ satisfying $\gamma\alpha = \beta$ if and only if $\alpha_j^r \geqq \beta_j^r$.*

(5. 3. 3) *$\alpha\beta = 0$ if and only if $\alpha_j^r \leqq \beta_j^0$.*

(5. 3. 4) *$e_j^0 = (1-e)_j^r$ for every idempotent $e$.*

(5. 3. 5) *$e_j^0 \dotplus (1-e)_j^0 = e_j^0 \oplus e_j^r = a_j$ for every idempotent $e$.*

(5. 3. 6) *$(\alpha - \beta)_i^0 = (\alpha_{ij}\beta_{ij} + a_j)\, a_i$ if $i > j$.*

(5. 3. 7) *$\alpha_{kj} \leqq (\alpha - \beta)_{kj} + \beta_j^r$ if $k > j$.*

P r o o f of (5. 3. 1). If $e$ is an idempotent element in $\Re$, then for any *fixed* $i > j$, lemma (4. 12. 13) shows that $e_{ij}$ is of the form $e_{ij}\, a_i + e_{ij}\, c_{ij}$ and

[16]) The reach of $\alpha$, $\alpha_j^r$, is identical with the $(\alpha)_j$ of VON NEUMANN [8, vol. II, Definition 9. 1]; (5. 3. 1) and (5. 3. 2) were established in [8, vol. II, Theorem 9. 3, Lemma 9. 1].

Lemmas (4. 15. 1) and (4. 15. 4) show that $e_{ij}$ is an $(i, j)$ fraternal element and hence $e$ is an $L$-number. The rest of (5. 3. 1) need only be verified for some particular $j$ which can be taken $< n$ and this follows from (4. 12. 1).

Proof of (5. 3. 2). The proof of (5. 3. 2) follows easily from (4. 12. 2).

Proof of (5. 3. 3). We need only prove this assuming some $i > j > k$. Then $\alpha\beta = 0$ means

$$a_i = (\alpha_{ij} + \beta_{jk})(a_i + a_k).$$

Because of the indivisibility of inverses, this is equivalent to each of:

$$a_i \leqq (\alpha_{ij} + \beta_{jk})(a_i + a_k)$$

$$a_i \leqq \alpha_{ij} + \beta_{jk}$$

$$(5.3.8) \qquad a_i + \alpha_{ij} \leqq \alpha_{ij} + \beta_{jk}$$

$$(5.3.9) \qquad (a_i + \alpha_{ij})(a_j + a_k) \leqq \beta_{jk}$$

(add $\alpha_{ij}$ to both sides of (5. 3. 9) to derive (5. 3. 8)). Thus $\alpha\beta = 0$ is equivalent to:

$$\alpha_j^r \leqq a_j \beta_{jk} = \beta_j^{l}.$$

Proof of (5. 3. 4). We need only prove this assuming some $i > j > k$. That $(1-e)_j^r \leqq e_j^l$ follows from (5. 3. 3). By (5. 3. 1) there exists an idempotent $f$ with $f_j^r = [e_j^l - (1-e)_j^r]$. Then $f_j^r \leqq e_j^l$; by (5. 3. 3) this implies $fe = 0$, $f(1-e) = f$, hence, using (5. 3. 2), $f_j^r = f_j^r(1-e)_j^r = 0$, that is, $e_j^l = (1-e)_j^r$.

Proof of (5. 3. 5). Because of (5. 3. 1) and (5. 3. 2) the correspondence $(\alpha)_l \longleftrightarrow \alpha_j^r$ is a (1, 1) order preserving correspondence between the left principal ideals of $\mathfrak{R}$ and the $x \leqq L(a_j)$; it follows that $e_j^r \oplus (1-e)_j^r = a_j$. Now (5. 3. 5) follows from (5. 3. 4).

Proof of (5. 3. 6). Using (5. 1. 3):

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)_k^{l} &= [\alpha_{ij} + (a_k + \beta_{ij})(a_j + c_{ik})]a_k \\ &= [\alpha_{ij}(a_k + \beta_{ij}) + (a_j + c_{ik})]a_k; \\ (\alpha-\beta)_i^{l} &= [(\alpha-\beta)_k^{l} + c_{ik}]a_i = (\alpha_{ij}\beta_{ij} + a_j + c_{ik})a_i \\ &= (\alpha_{ij}\beta_{ij} + a_j)a_i.\end{aligned}$$

Proof of (5. 3. 7). We need only prove this assuming some $k \neq i > j$. Using (5. 1. 3):

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)_{kj} + \beta_j^r &= [\alpha_{ij} + (a_k + \beta_{ij})(a_j + c_{ik}) + (\beta_{ij} + a_i)a_j](a_k + a_j) \\ &= [\alpha_{ij} + (\beta_{ij} + a_i + a_k)(a_j + c_{ik})](a_k + a_j) \\ &\geqq (\alpha_{ij} + c_{ik})(a_k + a_j)\alpha_{kj}.\end{aligned}$$

The methods used to prove (5. 3. 2) will also show the following theorems (we omit proofs since we do not make use of these theorems).

(5. 3. 10) For $\alpha$, $\beta$ in $\mathfrak{R}$ there is a $\gamma$ in $\mathfrak{R}$ satisfying $\alpha\gamma=\beta$ if and only if $\alpha_i^0 \leqq \beta_i^0$.

For $\alpha$ in $\mathfrak{R}$ and $\beta$ in $\mathfrak{R}'$:

(5. 3. 11) $\alpha_{ij} \leqq \beta_{ji}$ if and only if $\alpha\beta=1$;

(5. 3. 12) $\alpha_{ij} \geqq \beta_{ji}$ if and only if $\beta\alpha=1$.

## 6. The procedure for assigning coordinates.

**6. 1. The $i$-elements in $L$.** We shall call $x$ an *i-element* if $x \leqq A^i$ and $xA^{i-1}=0$. We shall prove that for arbitrary $\beta^j$ in $\mathfrak{R}$, $j=1,\ldots, i-1$, and arbitrary idempotent $e$ in $\mathfrak{R}$, the formula:

(6. 1. 1)
$$y=(e_i^r+A^{i-})\prod_{j=1}^{i-1}(\beta_{ij}^j+A_j^{i-1})$$

(the factor $\Pi$ to be omitted if $i=1$) defines an $i$-element. If $e=1$ then $e_i^r+A^{i-1}=a_i+A^{i-1}$ and may be omitted.

Indeed, $y\leqq A^i$ and

$$yA^{i-1}=A^{i-1}\prod_{j=1}^{i-1}(\beta_{ij}^j+A_j^{i-1})=A^{i-1}\prod_{j=1}^{i-1}(\beta_{ij}^j a_j+A_j^{i-1})=0.$$

Now consider an arbitrary but fixed $i$-element $x$. Define

(6. 1. 2)
$$x^j=(x+A_j^{i-1})(a_i+a_j), \qquad j=1,\ldots,i-1.$$

For fixed choice of idempotent $e=e(x)$ with $e_i^r=(x+A^{i-1})a_i$ (such an $e$ exists by (5. 3. 1)) we define:

(6. 1. 3)
$$B=B(x)=x+e_i^0; \quad B^j=(B+A_j^{i-1})(a_i+a_j)$$

(*B may not be uniquely determined by x*). The following relations hold:

(6. 1. 4) $e_i^r+a_j=x^j+a_j$; $\quad x^j+A_j^{i-1}=x+A_j^{i-1}$; $\quad e_i^r+A^{i-1}=x+A^{i-1}$.

(6. 1. 5) $B^j-e_i^0+(x+A_j^{i-1})(a_i+a_j)=e_i^0+x^j$;
$B^ja_i=e_i^0+x^ja_i$;
$BA^{i-1}=[x+e_i^0(x+A^{i-1})]A^{i-1}=(x+e_i^0e_i^r)A^{i-1}=0$ by (5. 3. 5);
$B+A^{i-1}=A^{i-1}+x+e_i^0=A^{i-1}+e_i^r+e_i^0=A^i$.

(6. 1. 6) $B^ja_j=(B+A_j^{i-1})a_j=(BA^{i-1}+A_j^{i-1})a_j=0$;
$B^j+a_j=(B+A^{i-1})(a_i+a_j)=a_i+a_j$.

(6. 1. 7) $B(e_i^r+A^{i-1})=B(x+A^{i-1})=x$ (use (6. 1. 3), (6. 1. 5));
$B^j(e_i^r+a_j)=B^j(x^j+a_j)=x^j$ (use (6. 1. 5), (6. 1. 6)).

(6.1.6) shows that $B^j$ is in $L_{ij}$ for each $j<i$. Let $\alpha^j$ be the element in $\Re$ with $\alpha^j_{ij}=B^j$. Then for every $\beta^j$ in $\Re$ with $\beta^j_{ij}\geqq x^j$, as we shall now show:

$$(6.1.8)\qquad e\alpha^j=\alpha^j=e\beta^j.$$

To verify (6.1.8): from (6.1.7), $\alpha^j_{ij}=B^j\geqq x^j$; from (6.1.5) and (5.3.4), $(\alpha^j)^0_i=B^j a_i\geqq e^0_i=(1-e)^r_i$; then (5.3.3) implies $(1-e)\alpha^j=0$, that is, $e\alpha^j=\alpha^j$.

Next, since $\alpha^j_{ij}\beta^j_{ij}\geqq x^j$, it follows from (5.3.6) that:

$$(\alpha^j-\beta^j)^0_i\geqq(x^j+a_j)a_i=e^r_i.$$

(5.3.3) now shows that $e(\alpha^j-\beta^j)=0$, hence $e\alpha^j=\alpha^j=e\beta^j$.

In the next section we shall make use of the following remark. Suppose $\bar e$ is also a possible choice for $e(x)$ and let $\bar\alpha^j$, $j<i$, denote the corresponding $\Re$-elements. By definition, $\bar e^r=e^r$; (5.3.2) implies $\bar e e=\bar e$, $e\bar e=e$; and from (6.1.8)

$$(6.1.9)\qquad \bar e\alpha^j=\bar\alpha^j\qquad(1\leqq j<i).$$

Since $BA^{i-1}=0$,

$$(6.1.10)\qquad \prod_{j=1}^{i-1}(\alpha^j_{ij}+A^{i-1}_j)=\prod_{j=1}^{i-1}(B+A^{i-1}_j)=B+\prod_{j=1}^{i-1}A^{i-1}_j=B;$$

$$(6.1.11)\qquad (e^r_i+A^{i-1})\prod_{j=1}^{i-1}(\alpha^j_{ij}+A^{i-1}_j)=(x+A^{i-1})B=x.$$

We shall now prove that for arbitrary $\beta^j$ with $\beta^j_{ij}\geqq x^j$, $j<i$, the $i$-element $y$ given by (6.1.1) is identical with $x$. Indeed,

$$\begin{aligned}(e^r_i+A^{i-1})(\alpha^j_{ij}+A^{i-1}_j)&=A^{i-1}_j+B^j(e^r_i+A^{i-1})(a_i+a_j)\\&=A^{i-1}_j+B^j(e^r_i+a_j)=A^{i-1}_j+x^j\quad\text{(use (6.1.4), (6.1.5), (6.1.6))}\\&\leqq A^{i-1}_j+\beta^j_{ij}\end{aligned}$$

for each $j<i$; hence $x\leqq y$. It follows from the indivisibity of inverses that $x=y$ $(yA^{i-1}=xA^{i-1}=0$ and $y+A^{i-1}=e^r_i+A^{i-1}=x+A^{i-1})$.

Conversely, as we now show, for arbitrary idempotent $e$ and arbitrary $\beta^j$ in $\Re$, the $i$-element $y$ of (6.1.1) has the properties: $y^j\leqq\beta^j_{ij}$ for $j<i$, and $e$ is a possible choice for $e(y)$. Indeed, $(y+A^{i-1})a_i=e^r_i$ and

$$\begin{aligned}y^j&=(e^r_i+A^{i-1})\left[\prod_{k=1}^{i-1}(\beta^k_{ik}+A^{i-1}_k)+A^{i-1}_j\right](a_i+a_j)\\&\leqq(\beta^j_{ij}+A^{i-1}_j)(a_i+a_j)=\beta^j_{ij},\end{aligned}$$

as stated. Moreover, (6.1.8) shows that $\alpha^j(y)=e\beta^j$.

**6.2. The rule for assigning left modules to elements of $L$.** For each $x$ in $L$ call $x_1, \dots, x_n$ a base-decomposition of $x$ if each $x_i$ is an inverse:

$$x_i = [xA^i - xA^{i-1}] \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Clearly each $x_i$ is an $i$-element and $x = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$. For each base-decomposition of $x$ and for any idempotent $e^i$ satisfying:

$$(e^i)_i^r = (x_i + A^{i-1})a_i = (xA^i + A^{i-1})a_i,$$

let $B(x_i)$, $B^j(x_i)$, $\alpha^{ij} = \alpha^j(x_i)$ be determined as in § 6.1, and define the vector

$$u(x_i) = (-\alpha^{i1}, \dots, -\alpha^{i,\, i-1}, e^i, 0, \dots, 0).$$

Now, for each such $u(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, assign to $x$ the left module

$$M(x_1, \dots, x_n) = (u(x_1), \dots, u(x_n))_l.$$

We note that: (i) the $x_i$ may not be uniquely determined by $x$ and for each $x_i$ the idempotent $e^i$ may not be uniquely determined by $x_i$, however it follows from (6.1.9) that $(u(x_i))_l$ is uniquely determined by $x_i$ so that $M(x_1, \dots, x_n)$ is uniquely determined by $x_1, \dots, x_n$; (ii) if $x$ is a $j$-element then the $x_i$ *are* uniquely determined with $x_i = x$ for $i = j$ and $x_i = 0$ for $i \neq j$; (iii) if $x_i$ is an arbitrary $i$-element for each $i = 1, \dots, n$, and $x = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$ then $x_1, \dots, x_n$ is a base-decomposition for $x$.

We shall prove below the following statements (6.2.1)—(6.2.7).

(6.2.1) *Every left module $M$ of finite span is identical with $M(x_1, \dots, x_n)$ for some base-decomposition $x_1, \dots, x_n$ of some $x$ in $L$.*

(6.2.2) *Suppose $x_1, \dots, x_n$ and $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ are base-decompositions for the same $x$. If*

$$u(x_m) = (-\alpha^{m,1}, \dots, -\alpha^{m,\, m-1}, e^m, 0, \dots, 0)$$

*and*

$$u(\bar{x}_m) = (-\bar{\alpha}^{m,1}, \dots, -\bar{\alpha}^{m,\, m-1}, \bar{e}^m, 0, \dots, 0)$$

*and the $\alpha^{m,k}$ and the $\bar{\alpha}^{m,k}$ both form canonical matrices*[17]) *with $\bar{e}_m = e^m$, then $M(x_1, \dots, x_n) = M(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$.*

(6.2.3) *Suppose $y$ is an i-element, $u(y)$ has i-th coordinate $\bar{e}$ and $z$ is a j-element with $1 \leq j < i \leq n$. Then* (i) *if $\gamma$ in $\mathfrak{R}$ satisfies $\bar{e}\gamma = \gamma$, the vector $u(y) + \gamma u(z)$ also has i-th coordinate equal to $\bar{e}$ and coincides with $u(x)$ for some i-element $x$; and* (ii) *if for some i-element $x$ there is a relation $u(x) = u(y) + \gamma u(z)$ for some $\gamma$ in $\mathfrak{R}$, then $x + z = y + z$.*

[17]) A matrix whose rows form a canonical basis (see § 1.2) is called a *canonical matrix*.

(6.2.4) *If $x$ has a base-decomposition $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ with*

$$u(\bar{x}_m) = (-\alpha^{m,1}, \ldots, -\alpha^{m,m-1}, e^m, 0, \ldots, 0),$$

*with the same $e^m$, such that the $\alpha^{m,k}$ form a canonical matrix and*

$$M(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = M(x_1, \ldots, x_n), \text{ then}$$

(6.2.5) *for each $x$ in $L$, all $M(x_1, \ldots, x_n)$ assigned to $x$ coincide, so that we may write $M(x)$ for $M(x_1, \ldots, x_n)$;*

(6.2.6) *$x \leqq y$ implies that $M(x) \leqq M(y)$;*

(6.2.7) *$M(x) \leqq M(y)$ implies $x \leqq y$.*

The coordinatization theorem follows easily from (6.2.1), (6.2.5), (6.2.6) and (6.2.7).

**6.3. Proof of** (6.2.1). $M$ is spanned by some canonical basis $u^i = (\alpha^{i1}, \ldots, \alpha^{in})$, $i = 1, \ldots, n$ (§ 3.4). Choose $e^i, x(i)$ as follows:

$$e^i = \alpha^{ii},$$

$$x(i) = [(e^i)_i^r + A^{i-1}] \prod_{j=1}^{i-1} [(-\alpha^{ij})_{ij} + A_j^{i-1}].$$

Then § 6.1 shows that each $x(i)$ is an $i$-element and that $e^i$ is a possible choice for $e(x(i))$; with this choice of $e(x(i))$ it follows from the last paragraph of § 6.1 that $\alpha^j(x(i)) = -\alpha^{ij}$ (for a canonical basis $e^i\alpha^{ij} = \alpha^{ij}$), that $u^i$ is a possible choice for $u(x(i))$ and hence $M$ coincides with $M(x_1, \ldots, x_n)$.

**6.4. Proof of** (6.2.2). We shall show that $\bar{x}_m = x_m$ for all $m$ so that the $\alpha^{mk}$ are uniquely determined by $x$ and the $e^m$ (if the $\alpha^{mk}$ are to form a canonical matrix).

Set $U^k = (e^k)_k^0 \leqq a_k$ for each $k < m$. Since (5.3.5) shows that $(e_k)_k^0\,(e_k)_k^r = 0$, it follows that

(6.4.1) $$U^k(x_k + A^{k-1}) = 0; \; x_k(U^k + A^{k-1}) = 0.$$

We shall show that

(6.4.2) $$x_m = x \prod_{k=1}^{m-1} (U^k + A_k^m);$$

this will establish the uniqueness of $x_m$ since the $U^k$ are uniquely determined by the $e^k$.

From § 6.2 there is a $B(x_m) \geqq x_m$ for which

$$\alpha_{mk}^{mk} = B(x_m) + A_k^{m-1})\,(a_m + a_k);$$

now (5.3.3) implies that $(\alpha^{mk})_k^r \leqq (e^k)_k^0$; i. e., $(B(x_m) + A_k^m)a_k \leqq U^k$. Hence $U^k + A_k^m \geqq B(x_m) \geqq x_m$ for each $k$ and so

$$\text{right side of (6.4.2)} \geqq x_m.$$

Equality in (6.4.2) now follows from the indivisibility of inverses; indeed,

(6.4.3) $\quad$ (right side of (6.4.2)) $+A^{m-1} \leqq xA^m + A^{m-1} = x_m + A^{m-1}$

so that equality holds in (6.4.3), and

$$\begin{aligned}
\text{(right side of (6.4.2))}\ A^{m-1} &= (x_1+\cdots+x_{m-1})\prod_{k=1}^{m-1}(U^k+A_k^m)\\
&= (x_1+\cdots+x_{m-1})\prod_{k=1}^{m-1}(U^k+A_k^{m-1})\\
&= (x_1+\cdots+x_{m-1})(U^{m-1}+A^{m-2})\prod_{k=1}^{m-2}(U^k+A_k^{m-1})\\
&= (x_1+\cdots+x_{m-2})\prod_{k=1}^{m-2}(U^k+A_k^{m-1}) \qquad \text{(use (6.4.1))}\\
&= (x_1+\cdots+x_{m-3})\prod_{k=1}^{m-3}(U^k+A_k^{m-2}) = \cdots = 0 = x_m A^{m-1}.
\end{aligned}$$

**6.5. Proof of** (6.2.3). (i) $u(y)+\gamma u(z)$ is of the form

$$(-\bar{e}\beta^1, -\bar{e}\beta^2, \ldots, -\bar{e}\beta^{i-1}, \bar{e}, 0, \ldots, 0)$$

and hence coincides with $u(x)$ for some $i$-element $x$ by the last paragraph of § 6.1.

(ii) We need only prove $x \leqq y+z$; for the relation $u(y)=u(x)+(-\gamma)u(z)$ would imply, in the same way, $y \leqq x+z$, hence $x+z \leqq y+z \leqq x+z$.

To show $x \leqq y+z$ we need only prove the statement: for arbitrary idempotents $\bar{e}$ and $e$ and $\alpha^m$ with $\bar{e}\alpha^m=\alpha^m$ for $m<i$, $\beta^m$ with $\bar{e}\beta^m=\beta^m$ for $m<i$, and $\theta^m$ with $e\theta^m=\theta^m$ for $m<j$, the conditions

$$(6.5.1) \qquad \begin{cases} \alpha^m = \beta^m & \text{for } j<m\leqq i\\ \alpha^j = \beta^j - \gamma e & \text{for some } \gamma\\ \alpha^m = \beta^m + \gamma\theta^m & \text{for } 1 \leqq m < j \end{cases}$$

imply:

$$(6.5.2) \qquad (\bar{e}_i^r + A^{i-1})\prod_{m=1}^{i-1}(\alpha_{im}^m + A_m^{i-1}) \leqq (\bar{e}_i^r + A^{i-1})\prod_{m=1}^{i-1}(\beta_{im}^m + A_m^{i-1}) + (e_j^r + A^{j-1})\prod_{m=1}^{j-1}(\theta_{jm}^m + A_m^{j-1}).$$

It is sufficient to establish in place of (6.5.2):

$$(6.5.3) \qquad \prod_{m=1}^{j}(\alpha_{im}^m + A_m^j) \leqq \prod_{m=1}^{j}(\beta_{im}^m + A_m^j) + (e_j^r + A^{j-1})\prod_{m=1}^{j-1}(\theta_{jm}^m + A_m^{j-1})$$

for we can then derive (6. 5. 2) by adding $a_{j+1}+\cdots+a_{i-1}$ to both sides of (6. 5. 3) and then clipping both sides by

$$(\bar{e}_i^r + A^{i-1}) \prod_{m=j+1}^{i-1} (a_{im}^m + A_m^{i-1}).$$

But (6. 5. 3) can be derived from

$$\text{(6. 5. 4)} \qquad \text{left side of (6. 5. 3)} \leqq \prod_{m=1}^{j} (\beta_{im}^m + A_m^j) + \prod_{m=1}^{j-1} (\theta_{jm}^m + A_m^{j-1})$$

by clipping both sides of (6. 5. 4) by $\beta_{ij}^j + e_j^r + A^{j-1}$: indeed, this clipping does not change the left side of (6. 5. 4) since one of its factors is

$$\begin{aligned} a_{ij}^j + A^{j-1} &= (\beta^j - \gamma e)_{ij} + A^{j-1} \\ &\leqq \beta_{ij}^j + (-\gamma e)_j^r + A^{j-1} && \text{using (5. 3. 7)} \\ &\leqq \beta_{ij}^j + e_j^r + A^{j-1} && \text{using (5. 3. 2);} \end{aligned}$$

on the other hand this clipping changes the right side of (6. 5. 4) to

$$\begin{aligned} &\prod_{m=1}^{j} (\beta_{im}^m + A_m^j) + (\beta_{ij}^j + e_j^r + A^{j-1}) \prod_{m=1}^{j-1} (\theta_{jm}^m + A_m^{j-1}) && \text{(ML)} \\ &= \text{right side of (6. 5. 3)} \end{aligned}$$

since the modular law implies $(\beta_{ij}^j + e_j^r + A^{j-1})A^j = e_j^r + A^{j-1}$.

Since $\alpha^m = \beta^m + \gamma e \theta^m$ for $m < j$ and $\alpha^j = \beta^j - \gamma e$, the desired (6. 5. 4) follows immediately from (5. 2. 3), using $\gamma e$ in place of the $\gamma$ in (5. 2. 3).

**6. 6. Proof of** (6. 2. 4). By (6. 2. 3), for each $m > 1$, the vector $u(x_m) + \alpha^{m,1} u(x_1)$ coincides with $u(\bar{x}_m)$ for some $m$-element $\bar{x}_m$ such that $\bar{x}_m + x_1 = x_m + x_1$. Then $x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ is again a base-decomposition of $x$ with $\bar{\alpha}^{m,1} e^1 = 0$ for $m > 1$. Similarly $\bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_n$ can be replaced so that the new $\bar{\alpha}^{i,j}$ satisfy also $\bar{\alpha}^{m,2} e^2 = 0$ for $m > 2$. Successive repetition of this procedure establishes (6. 2. 4).

**6. 7. Proof of** (6. 2. 5). If $M = M(x_1, \ldots, x_n) = (u(x_1), \ldots, u(x_n))_l$ and $e^m$ is the $m$-th coordinate of $u(x_m)$ we may, without changing $M$, replace $u(x_m)$ by $f^m(u(x_m))$ where $f^m$ is *any* idempotent satisfying $(f^m)_m^r = (xA^m + A^{m-1})a_m$. The statement (6. 2. 5) now follows from (6. 2. 4) and (6. 2. 2).

**6. 8. Proof of** (6. 2. 6). If $x \leqq y$, we may choose base-decompositions $x_i, i \leqq n$ and $y_i, i \leqq n$ so that $x_i \leqq y_i$ (for example, choose $y_i = x_i + [yA^i - (yA^{i-1} + x_i)]$. Then $(e(x_i))_i^r \leqq (e(y_i))_i^r$ which implies $e(x_i)e(y_i) = e(x_i)$; we may choose $\beta^j(x_i)$ to coincide with $\beta^j(y_i)$ since

$$\beta_{ij}^j(y_i) \geqq (y_i + A_j^{i-1})(a_i + a_j) \geqq x_i + A_j^{i-1})(a_i + a_j).$$

Now $e(x_i)u(y_i)=u(x_i)$ for $i \leqq n$, hence $M(x_1,\ldots,x_n) \leqq M(y_1,\ldots,y_n)$. Because of (6. 2. 5) it follows that $M(x) \leqq M(y)$.

**6. 9. Proof of** (6. 2. 7). Since $x$ is a union of $i$-elements, it is clearly sufficient to prove (6. 2. 7) with the restriction that $x$ is an $i$-element. Then we suppose that $y$ has a base-decomposition $y_i, i \leqq n$, and that

$$u(x)=\gamma_1 u(y_1)+\cdots+\gamma_n u(y_n). \tag{6. 9. 1}$$

Let $e(x)$ be the $i$-th coordinate of $u(x)$ and let $e(y_m)$ be the $m$-th coordinate of $u(y_m)$. Then in (6. 9. 1), we may suppose that (i) $\gamma_m=0$ for $m>i$, (ii) $e(x)e(y_i)=\gamma_i=e(x)$, (iii) $e(x)\gamma_m=\gamma_m$ for all $m$.

To prove (i), suppose $i<n$. The $n$-th coordinates of $u(x)$ and of $\gamma_m u(y_m)$ for $m<n$ are all 0; hence the $n$-th coordinate of $\gamma_n u(y_n)$ equals 0 and we may suppose $\gamma_n=0$. Successive applications of this argument establish (i).

Now consider $i$-th coordinates; $e(x)=\gamma_i e(y_i)$, hence $e(x)e(y_i)=\gamma_i e(y_i)$ $=e(x)$ and we may replace $\gamma_i$ in (6. 9. 1) by $e(x)$ to obtain (ii).

Since $e(x)u(x)=u(x)$ we may replace $\gamma_m$ in (6. 9. 1) by $e(x)\gamma_m$ to obtain (iii).

We may even assume that $\gamma_i=1$ in (6. 9. 1), for the last paragraph of § 6. 1 shows that $\gamma_i u(y_i)$, (that is, $e(x)u(y_i)$), coincides with $u(\bar{y}_i)$ for some $i$-element $\bar{y}_i$. The last paragraph of § 6. 1 shows that $\bar{y}_i \leqq y_i$ since

$$(e(\bar{y}_i))_i^r=(e(x)e(y_i))_i^r \leqq (e(y_i))_i^r.$$

Hence it is sufficient to prove (6. 2. 7) with $y_i$ replaced by $\bar{y}_i$. Thus we may suppose that in (6. 9. 1), $\gamma_i=1$ and $e(y_i)=e(x)=e$ (say) and $e\gamma_m=\gamma_m$ for all $m$. Now (6. 2. 3) shows that $u(y_i)+\gamma_{i-1}u(y_{i-1})=u(z)$ for some $i$-element $z$ with $z \leqq y_i+y_{i-1}$. Similarly, $u(z)+\gamma_{i-2}u(y_{i-2})=u(\bar{z})$ for some $i$-element $\bar{z} \leqq z+y_{i-2} \leqq y_i+y_{i-1}+y_{i-2}$. Repetition of this argument finally yields $x \leqq y_i+y_{i-1}+\cdots+y_1 \leqq y$, as required.

This completes the proof of all statements from (6. 2. 1) to (6. 2. 7) and establishes the coordinatization theorem.

## 7. The case of projective geometry.

**7. 1.** The previous discussion clearly applies to the case of classical projective geometry with a normalized frame consisting of points, that is, atoms[18]). We shall now investigate the meaning of our conditions (4. 3. 3), (4. 3. 4) and (4. 10. 3) in the case of *plane* projective geometry (the only case in which these conditions need to be postulated).

[18]) In this case $\mathfrak{R}$, the ring of coordinates, is a field (see footnote 13).

**7. 2.** Because of footnotes 5 and 10 and since $x$, $y$, $a_i$, $a_j$, $c_{ij}$ are all atoms, (4. 3. 3) and (4. 3. 4) need be assumed only for the case of $xa_i = 0$, $ya_i = 0$, and (4. 10. 3) need be assumed only for the case that $xa_i$, $ya_i$, $xc_{ij}$ and $yc_{ij}$ are all 0.

Now in the case of projective geometry, we shall show that (4. 3. 2) implies (4. 3. 3). Indeed, suppose (4. 2. 1) and (4. 2. 2) hold; we need consider only the case that (4. 2. 3) fails. Then $A \geqq a_j$ and the $z$ of (4. 2. 4) reduces to $a_i + a_j$ so that (4. 3. 3) does hold.

Similarly we shall show that (4. 3. 2) implies (4. 3. 4). Indeed, suppose (4. 2. 2) and (4. 2. 3) hold; we need consider only the case that (4. 2. 1) fails. Then $(a_i + A + B)x = 0$ and the $z$ of (4. 2. 4) reduces to 0 so that (4. 3. 4) does hold.

Similarly we shall show that (4. 10. 2) implies (4. 10. 3). Indeed, suppose (4. 9. 1) and (4. 9. 2) hold. If (4. 9. 3) fails, $A \geqq a_j$ and the $z$ of (4. 9. 4) reduces to $a_i + y$. If (4. 9 .3) holds, then

$$(z \text{ of } (4.9.4)) + y = a_i(x + A + c_{ij}) + y \leqq a_i + y$$

so that (4. 10. 3) does hold.

**7. 3.** Thus we need assume only (4. 3. 2) and (4. 10. 2) under the restrictions of § 7. 2. Straight-forward inspection confirms that the assumptions of § 7. 3 do hold if we have the following conditions[19, 20]):

Q u a d r a n g l e c o n d i t i o n ((7. 3. 1)—(7. 3. 4)): Suppose two quadrangles $P_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, and $P'_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, and a line $W$ are such that:

(7. 3. 1) *no three of the vertices of the same quadrangle lie on a common line;*

(7. 3. 2) *$W$ contains none of the vertices of either quadrangle.*

---

[19]) To derive (4. 3. 2) from the quadrangle condition, choose $P_1 = A$, $P_2 = B$, $P_3 = (x + A)(a_i + B)$, $P_4 = [(x + A)(a_i + B) + a_j](y + B)$ and $W = a_i + a_j$ (the conditions (4. 2. 1), (4. 2. 2) and (4. 2. 3) together with the restrictions $x \neq a_i$, $y \neq a_i$ imply that $A, B$ are points with $A \neq B$, and that (7. 3. 1), (7. 3. 2) hold). Actually (4. 3. 2) can be derived from the uniqueness of the harmonic point condition; indeed the $z$ of (4. 2. 4) coincides with the harmonic conjugate of $a_j$ with respect to $a_i$ and $b$ where $b$ itself is the harmonic conjugate of $a_j$ with respect to $x$ and $y$. The uniqueness of the harmonic point condition is of course implied by the quadrangle condition but the converse need not hold [5, § III 3]. To derive (4. 10. 2) from the quadrangle condition, choose $P_1 = A$, $P_2 = [y + (c_{ij} + A)(a_i + B)](a_j + B)$, $P_3 = (a_i + B)(c_{ij} + A)$, $P_4 = (x + A)(a_i + B)$ and $W = a_i + a_j$ (the restrictions (7. 3. 2) and (7. 3. 3) follow from (4. 9. 1), (4. 9. 2) and (4. 9. 3) together with the restrictions $x \neq a_i$, $x \neq c_{ij}$, $y \neq a_i$, $y \neq c_{ij}$).

[20]) (7. 3. 1) is the *fundamental theorem on quadrangular sets* as given by VEBLEN and YOUNG [6, Theorem 3, page 47]; (7. 4. 3) is the *theorem of Desargues* [6, Theorem 1, page 41], and (7. 4. 2) is the dual (and converse) of the theorem of DESARGUES [6, Theorem 1, page 41]. However, the hypotheses of our quadrangle condition, and (7. 4. 2), (7. 4. 3) are subject to restrictions which are not specifically included in the corresponding theorems of VEBLEN and YOUNG.

For $i, j=1, 2, 3, i\neq j$, let $P_{ij}=(P_i+P_j)W$ ($P_{ij}$ is a point since $P_i+P$ and $W$ are different lines). Similarly let $P'_{ij}=(P'_i+P'_j)W$. Now suppose also that:

(7. 3. 3) $P_{ij}=P'_{ij}$ *except possibly for the pair* $(i, j)=(3, 4)$.

(7. 3. 4) *Then* (7. 3. 3) *holds also for the pair* $(i, j)=(3, 4)$.

**7. 4.** It is well known (and easily shown) that in a plane projective geometry all lines contain the same number of points, $N$ (say), and each point lies on precisely $N$ distinct lines. We shall prove:

(7. 4. 1) (i) *If* $N=3$ *or* 4 *the quadrangle condition necessarily holds.*
(ii) $N$ *is infinite or finite but* $>4$, *the quadrangle condition*[20]) *can be deduced from the following two triangle conditions:*

(7. 4. 2) *If* $P_i$, $i=1, 2, 3$, *are points not on a line, if* $P'_i$, $i=1, 2, 3$, *are points not on a line, if* $W$ *is a line containing none of the* $P_i$, $P'_i$, $i=1, 2, 3$, *and if for each pair* $i, j=1, 2, 3$, $i\neq j$: *the lines* $P_i+P_j$ and $P'_i+P'_j$ *(these are lines different from* $W$*) meet* $W$ *in the same point, then a point* $Q$ *exists such that for each* $i=1, 2, 3$: *the points* $Q, P_i, P'_i$ *are on a line.*

(7. 4. 3) *If* $P_i$, $i=1, 2, 3$, *are points not on a line, and* $P'_i$, $i=1, 2, 3$, *are also points not on a line, and* $Q$ *is a point on none of* $P_i+P_j$, $P'_i+P'_j$, $i, j=1, 2, 3$, $i\neq j$, *and if for each* $i=1, 2, 3$: $Q+P_i=Q+P'_i$, *then a line* $W$ *exists such that for each pair* $i, j=1, 2, 3$, $i\neq j$: *the lines* $W, P_i+P_j, P'_i+P'_j$ *contain a common point.*

Proof of (7. 4. 1) (i). From (7. 3. 1), (7. 3. 2) and (7. 3. 3) each of $P_{12}$, $P_{34}$, $P'_{34}$ is different from each of $P_{13}$, $P_{14}$, $P_{23}$, $P_{24}$, and $P_{13}\neq P_{14}\neq P_{24}\neq P_{23}\neq P_{13}$. Suppose if possible that $P_{34}\neq P'_{34}$. Then $N$ must be $>3$; hence $N=4$ and $P_{13}=P_{24}$, $P_{14}=P_{23}$, $P_{12}=P_{34}$ or $P'_{34}$ (without loss of generality, assume $P_{12}=P_{34}$). Let $Q$ be a point on $P_1+P_4$, with $Q$ different from each of $P_1$, $P_4$, $P_{14}$ (such $Q$ exist since $N=4$). Now each of $Q+P_3$, $Q+P_2$ is a line and must contain the point of $W$ which is different from each of $P_{12}$, $P_{23}$, $P_{13}$. Since $Q$ is different from $P_{14}$, it follows that $Q$ lies on $P_2+P_3$; since $Q$ also lies on $P_1+P_4$ and $P_{23}=P_{14}$, this implies $Q=P_{14}$. This contradiction establishes (7. 4. 1) (i).

Proof of (7. 4. 1) (ii): *Case* I. Suppose, as a special case, that:

(7. 4. 4) $P_1+P_2\neq P'_1+P'_2$; $P_1+P_3\neq P'_1+P'_3$; $P_1+P_4\neq P'_1+P'_4$.

We may assume

(7. 4. 5) $$P_3+P_4\neq P'_3+P'_4$$

for equality in (7. 4. 5) would immediately imply $P_{34}=P'_{34}$.

(7.4.2), applied to $P_1$, $P_2$, $P_3$ and $P'_1$, $P'_2$, $P'_3$, shows that a point $Q$ exists such that for each $i=1,2,3$: the points $Q$, $P_i$, $P'_i$ lie on a line. Similarly a point $Q'$ exists such that for each $i=1, 2, 4$: the points $Q'$, $P_i, P'_i$ lie on a line. From (7.4.4) it follows easily that $Q=(P_1+P'_1)(P_2+P'_2)$ $=Q'$ and that $Q$ is different from each of $P_1, P_2, P_3, P_4, P'_1, P'_2, P'_3, P'_4$.

If the line $P_1+P_4$ contained $Q$ it would also contain $P'_1$; then $P_1+P_4=P_1+P_{14}=P'_1+P'_{14}=P'_1+P'_4$, contradicting (7.4.4). Thus $Q$ does *not* lie on $P_1+P_4$. Similarly $Q$ does *not* lie on any of $P_1+P_3, P'_1+P'_4$, $P'_1+P'_3$.

Next, if $P_3+P_4$ contained $Q$, it would also contain $P'_3+P'_4$, contradicting (7.4.5). Thus $Q$ does *not* lie on $P_3+P_4$, and similarly $Q$ does *not* lie on $P'_3+P'_4$.

The preceding paragraphs show that (7.4.3) applies to $P_1, P_3, P_4$ and $P'_1, P'_3, P'_4$. Hence there exists a line $W'$ such that for each pair $i, j=1, 3, 4$, $i\neq j$: $W'$, $P_i+P_j$, $P'_i+P'_j$ contain a common point.

Now by (7.4.4), $P_1+P_3\neq P_1+P'_3$; hence their intersection $P_{13}$ (which lies on $W$) must lie on $W'$. Similarly, $P_{14}$ (which lies on $W$) must lie on $W'$. Since $P_{13}\neq P_{14}$ it follows that $W=W'$. Hence $P_{34}=(P_3+P_4)\,W=$ $(P'_3+P'_4)\,W=P'_{34}$ as required.

*Case* II. Suppose, as a special case, that:

(7.4.6) $\quad P_1+P_2\neq P'_1+P'_2;\ P_2+P_3\neq P'_2+P'_3;\ P_2+P_4\neq P'_2+P'_4.$

Then the proof for Case I with 1 and 2 interchanged shows that (7.4.1) (ii) holds in this case also.

*General Case.* We shall show the existence of points $P^*_i$, $i=1,2,3,4$, such that:

(7.4.7) the conditions (7.3.1), (7.3.2) and (7.3.3) and also (7.4.4) are satisfied by $P_i$ and $P^*_i$, $i=1,2,3,4$;

(7.4.8) the conditions (7.3.1), (7.3.2) and (7.3.3) and also (7.4.6) are satisfied by $P^*_i$ and $P'_i$, $i=1,2,3,4$.

It will then follow that $P_{34}=P^*_{34}=P'_{34}$, which will complete the proof of (7.4.1) (ii).

To determine such $P^*_i$, choose any line $W'$ through $P_{12}$ different from $W, P_1+P_2, P'_1+P'_2$ (this is possible since $N\geqq 4$). Choose a point $P^*_1$ on $W'$ but different from each of $P_{12}, (P_1+P_3)\,W', (P_1+P_4)\,W'$ (such $P^*_1$ exist since $N\geqq 4$). Choose a point $P^*_2$ on $W'$ but different from each of $P_{12}$, $P^*_1$, $(P'_2+P'_3)\,W', (P'_2+P'_4)\,W'$ (such $P^*_2$ exist since $N>4$).

Now let $P^*_3=(P^*_1+P_{13})(P^*_2+P_{23})$, $P^*_4=(P^*_1+P_{14})(P^*_2+P_{24})$. It is easily verified that $P^*_3$, $P^*_4$ are points and that these $P^*_i$ satisfy the conditions (7.4.7) and (7.4.8).

Next we shall verify:

(7.4.9) *The dual (and converse) triangle conditions* (7.4.2) *and* (7.4.3) *are equivalent.*

Proof of (7.4.9). Assume (7.4.2) and suppose that $P_i, P'_i, i=1,2,3,$ and $Q$ satisfy the conditions of (7.4.3).

If $P_1 = P'_1$, then the line containing $P_1$ and any point of $(P_2+P_3)(P'_2+P'_3)$ will serve as the required $W$; hence we may suppose $P_1 \neq P'_1$. Similarly we may also assume $P_2 \neq P'_2, P_3 \neq P'_3$ and hence $P_1+P'_1, P_2+P'_2, P_3+P'_3$ are different lines.

Let $A_1 = (P_2+P_3)(P'_2+P'_3), A_2 = (P_3+P_1)(P'_3+P'_1), A_3 = (P_1+P_2)(P'_1+P'_2)$. Then the $A_i$ must be different points.

Let $A^*_3 = (A_1+A_2)(P_1+P_2)$, $P^*_1 = (A^*_3+P'_3)(P'_1+P'_2)$. Necessarily, $A^*_3$ is a point different from $A_1$. If $A^*_3$ were on $P'_2+P'_3$, this would imply that $A_1+A^*_3$ coincides with $P'_2+P'_3$ and contains $A_2$, hence also $P'_1$; thus $P'_1, P'_2, P'_3$ would lie on a line, contrary to hypothesis. Thus $A^*_3$ is *not* on $P'_2+P'_3$ (similarly $A^*_3$ is not on $P'_1+P'_3$). Hence $P^*_1$ is a point not on $P'_2+P'_3$.

Now $A^*_3 = A_3$, so that the line $A_1+A_2$ serves as the required $W$; for if $A^*_3 \neq A_3$, then $A^*_3$ does *not* lie on $P'_1+P'_2$ and the conditions of (7.4.2) are satisfied by $P_1, P_2, P_3$ and $P^*_1, P'_2, P'_3$ and the line $A_1+A_2$. Hence there exists a point $Q'$ such that $Q'$, $P_1$, $P^*_1$ lie on a line and $Q'$, $P_i, P'_i$ lie on a line for $i=2,3$. Then $Q'$ must be $Q$ and $P^*_1$ lies on $P_1+P'_1$, hence $P^*_1 = P'_1$, and hence $A^*_3$ lies on $P'_1+P'_3$, a contradiction. This shows that $A^*_3 = A_3$ as stated and (7.4.3) is proved assuming (7.4.2).

The dual of the above proof shows that (7.4.2) holds if (7.4.3) is assumed. This completes the proof of (7.4.9).

Thus our coordinatization theorem proves that a projective geometry can be coordinatized if its dimension is $\geqq 3$ or if its dimension is 2 and DESARGUES's theorem, *as stated in* (7.4.3), holds.

On the other hand, if a projective geometry can be coordinatized, the projective geometry can be embedded in a projective geometry of dimension $\geqq 3$, and it is then easy to verify that DESARGUES's theorem must hold.

## References.

[1] K. D. FRYER and ISRAEL HALPERIN, Coordinates in Geometry, *Transactions of the Royal Society of Canada*, Third Series, Section III, **48** (1954), 11—26.

[2] ——— On the Coordinatization Theorem of J. von Neumann, *Canadian Journal of Math.*, 7 (1955), 432—444.

[3] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, seventh edition (Berlin, 1930).

[4] F. MAEDA, *Continuous Geometry* (Tokyo, 1952) (in Japanese, see Math. Reviews, **15** (1954), p. 540).

[5] R. MOUFANG, Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit ($D_9$), *Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität*, **9** (1933), 207—222.

[6] O. VEBLEN and J. W. YOUNG, *Projective Geometry*, Vol. I (New York, 1938).

[7] J. VON NEUMANN, papers in *Proceedings of the National Academy of Sciences:*
   (i) Continuous Geometry, **22** (1936), 92—100;
   (ii) Examples of Continuous Geometries, **22** (1936), 101—108;
   (iii) On Regular Rings, **22** (1936), 707—713;
   (iv) Algebraic Theory of Continuous Geometries, **23** (1937), 19—22;
   (v) Continuous Rings and their Arithmetics, **23** (1937), 341—349.

[8] ——— *Continuous Geometry*, Vols. I, II, III, planographed lecture notes, Institute for Advanced Study (Princeton, 1936).

ROYAL MILITARY COLLEGE OF CANADA
QUEEN'S UNIVERSITY, CANADA.

*(Received August 8, 1956.)*

# Some remarks on set theory. V.

By P. ERDŐS in Haifa (Israel) and G. FODOR in Szeged.

Let $E$ be an arbitrary set of power $\mathfrak{m}$ and suppose that with every element $x$ of $E$ there is associated a *non empty* subset of $E$. Two distinct elements of $E$, $x$ and $y$, are called *independent*, if $x \notin f(y)$ and $y \notin f(x)$. A subset $F$ of $E$ is called *free* if $F$ has only one element or if $F$ has at least two elements and any two of their distinct elements are independent. We say that the subset $\Gamma$ of $E$ has the property $T(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$, where $\mathfrak{q}$ and $\mathfrak{p}$ are two cardinal numbers such that $\mathfrak{q} \leqq \mathfrak{m}$, $\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{m}$, if

$$\Gamma = \overline{\overline{\bigcup_{x \in \Gamma} f(x)}} = \mathfrak{q} \quad \text{and} \quad \overline{\overline{\bigcup_{\substack{x, y \in \Gamma \\ x \neq y}} (f(x) \cap f(y))}} < \mathfrak{p}.$$

A subset $C$ of $E$ is called closed, if for every element $x$ of $C$, $f(x) \subseteqq C$.

We assume that $\overline{\overline{\bigcup_{x \in E} f(x)}} = \mathfrak{m}$ and one of the following conditions hold for the sets $f(x)$:

(A) There is a cardinal number $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ such that, for every $x \in E$, $\overline{\overline{f(x)}} < \mathfrak{n}$.

(B) There is a cardinal number $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ such that, for every pair of distinct elements $x$ and $y$ of $E$, $\overline{\overline{f(x) \cap f(y)}} < \mathfrak{n}$.

(C) If $x, y \in E$ and $x \neq y$, then $f(x) \not\subseteq f(y)$ and $f(y) \not\subseteq f(x)$.

(D) For every $x \in E$, the power of the set of elements $y$, for which $f(x) \cap f(y) \neq 0$, is smaller than $\mathfrak{m}$.

We deal in this paper first with the following two questions.

1. Whether or not these conditions imply the existence of subsets with the property $T(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ of $E$.

2. Whether or not these conditions imply the existence of free sets of certain cardinalities.

If the condition (A) is satisfied, then both questions are investigated (in some cases by supposing the generalised continuum hypothesis) (see [1],

[2], [4]). For instance $E$ has a free subset of power $\mathfrak{m}$ and a subset with the property $T(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ (if $\mathfrak{m}$ is the sum of $\mathfrak{n}$ cardinal numbers smaller than $\mathfrak{m}$, the generalised continuum hypothesis is assumed).

In the sections I, II, III a number of results is given with respect to the questions 1 und 2, if one of the conditions (B), (C), (D) is satisfied.

Our most interesting unsolved problem is the following one: Let $\mathfrak{m}$ be any cardinal, $\overline{\overline{f(x)}} < \mathfrak{m}, \overline{\overline{f(x) \cap f(y)}} < \mathfrak{n} < \mathfrak{m}$. Does there then exist a free subset of power $\mathfrak{m}$? We can only prove (without the generalised continuum hypothesis) that there always exists an infinite free subset (theorem 8). Perhaps the most striking formulation of our unsolved problem is the case $\mathfrak{m} = \aleph_1$, $\mathfrak{n} = \aleph_0$. If $\mathfrak{m} = \aleph_1, \mathfrak{n} = k < \aleph_0$ we can prove (without the continuum hypothesis) the existence of a free subset of power $\aleph_1$ (theorem 6).

Finally we deal with the following two questions:

a) If the condition (A) is satisfied, does there exist a closed proper subset of $E$, of power $\mathfrak{m}$?

b) If the condition (A) is satisfied, do there exist two almost disjoint closed subsets of $E$, of power $\mathfrak{m}$?

These questions are completely solved in section IV.

*Notation and definitions.* Throughout this paper, the symbols $\overline{\overline{F}}$ and $\overline{\beta}$ denote the cardinal number of the set $F$ and the ordinal number $\beta$, respectively. For any subset $\Gamma$ of $E$ let

$$\textstyle\sum_\Gamma^f = \bigcup_{x \in \Gamma} f(x) \quad \text{and} \quad \prod_\Gamma^f = \bigcup_{\substack{x, y \in \Gamma \\ x \neq y}} (f(x) \cap f(y)).$$

For any $x \in E$, let $f^{-1}(x) = \{y : x \in f(y)\}$. For any cardinal number $\mathfrak{r}$ we denote by $\varphi_{\mathfrak{r}}$ the initial number of $\mathfrak{r}$, by $\mathfrak{r}^*$ the smallest cardinal number for which $\mathfrak{r}$ is the sum of $\mathfrak{r}^*$ cardinal numbers each of which is smaller than $\mathfrak{r}$, by $\mathfrak{r}^-$ the immediate predecessor of $\mathfrak{r}$ provided that such a predecessor exists. We say that $\mathfrak{r}$ is singular if $\mathfrak{r}$ can be represented in the form $\mathfrak{r} = \sum_{\nu \in F} \mathfrak{r}_\nu$, where $\overline{\overline{F}} < \mathfrak{r}, \mathfrak{r}_\nu < \mathfrak{r}$, and regular if no such representation exists.

We say that the sets $F_1$ and $F_2$ are almost disjoint if $\overline{\overline{F_1 \cap F_2}} < \min(\overline{\overline{F_1}}, \overline{\overline{F_2}})$.

## I.

We assume in this section that the condition (B) holds on the sets $f(x)$ and we give some results concerning to the questions 1 and 2.

We begin by proving two lemmas.

Lemma 1. *Let $A$ be a set of power $\mathfrak{m}, \mathfrak{m} \geqq \aleph_0$. There is a sequence $\{A_\xi\}_{\xi < \varphi_\mathfrak{m}}$ of the type $\varphi_\mathfrak{m}$, of subsets of $A$ such that*

1. $A = \bigcup_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}} A_\xi$,

2. $\overline{\overline{A_\xi}} = \mathfrak{m}$ *for every* $\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}$,

3. $\overline{\overline{A_\nu \cap A_\mu}} = 1$ *for every* $\nu, \mu, \nu < \varphi_{\mathfrak{m}}, \mu < \varphi_{\mathfrak{m}}$ *and* $\nu \neq \mu$,

4. $\overline{\overline{A_\alpha - \bigcup_{\xi < \alpha} A_\xi}} = \mathfrak{m}$ *for every* $\alpha < \varphi_{\mathfrak{m}}$,

5. *if* $x \in A$, *then there are at most two ordinal numbers* $\nu$ *and* $\mu$, *such that* $x \in A_\nu$ *and* $x \in A_\mu$,

6. *if* $\overline{\overline{\bigcup_{\substack{\mu, \nu \in \Gamma \\ \mu \neq \nu}} (A_\nu \cap A_\mu)}} < \mathfrak{m}$, *then* $\overline{\overline{\Gamma}} < \mathfrak{m}$.[1])

Proof. Let $\{B_\xi\}_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}}$ be a sequence of subsets of $A$ such that $\overline{\overline{B_\xi}} = \mathfrak{m}$, $A = \bigcup_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}} B_\xi$ and $B_\nu \cap B_\mu = 0$ for every $\mu, \nu$ with $\nu < \varphi_{\mathfrak{m}}, \mu < \varphi_{\mathfrak{m}}$ and $\nu \neq \mu$. We define the sequence $\{A_\xi\}_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}}$ by transfinite induction as follows: Let $A_0 = B_0$. Let now $\beta$ be an ordinal number, $0 < \beta < \varphi_{\mathfrak{m}}$, and suppose that all sets $A_\xi$, where $0 \leq \xi < \beta$, have been already defined such that the conditions 2, 3, 4 hold for $\xi < \beta$; $\mu, \nu < \beta$; and $\alpha < \beta$. Let $A_\beta = B_\beta \cup \{x_\xi\}_{\xi < \beta}$, where $x_\xi \in A_\xi - \bigcup_{\zeta < \xi} A_\zeta - \{x_\zeta\}_{\zeta < \xi}$. It is easy to see that the conditions 1—6 are satisfied.

Lemma 2. *If* $A$ *is a set of power* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} > \aleph_0$, $\mathfrak{m}$ *has immediate predecessor and* $\mathfrak{m}^-$ *is regular, then there is a sequence* $\{A_\xi\}_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}}$ *of the type* $\varphi_{\mathfrak{m}}$ *of subsets of* $A$ *such that*

1. $A = \bigcup_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}} A_\xi$,

2. $\overline{\overline{A_\xi}} = \mathfrak{m}^-$ *for every* $\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}$,

3. $\overline{\overline{A_\nu \cap A_\mu}} < \mathfrak{m}^-$ *for every distinct* $\nu, \mu, \nu < \varphi_{\mathfrak{m}}$ *and* $\mu < \varphi_{\mathfrak{m}}$,

4. $\overline{\overline{A_\alpha - \bigcup_{\xi < \alpha} A_\xi}} = \mathfrak{m}^-$ *for every* $\alpha < \varphi_{\mathfrak{m}}$,

5. *if* $\overline{\overline{\bigcup_{\substack{\nu, \mu \in \Gamma \\ \nu \neq \mu}} (A_\nu \cap A_\mu)}} < \mathfrak{m}$, *then* $\overline{\overline{\Gamma}} < \mathfrak{m}$.

Proof. Let $\{B_\xi\}_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}}$ be a sequence of subsets of $A$, such that $\overline{\overline{B_\xi}} = \mathfrak{m}^-$, $A = \bigcup_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}} B_\xi$ and $B_\nu \cap B_\mu = 0$ for every distinct $\nu, \mu < \varphi_{\mathfrak{m}}$. We define the sequence $\{A_\xi\}_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}}$ by transfinite induction in the following manner: Let $A_0 = B_0$. Let now $\beta$ be an ordinal number, $0 < \beta < \varphi_{\mathfrak{m}}$, and suppose that all sets $A_\xi$, where $0 \leq \xi < \beta$, have been already defined such that 2, 3, and 4 are satisfied for $\xi < \beta$; $\mu, \nu < \beta$; and $\alpha < \beta$.

[1]) It is clear that 6 follows from 3 and 5.

If $\beta \leqq \varphi_{\mathfrak{m}^-}$, then we define $A_\beta$ in the same way as in the proof of lemma 1. If $\beta > \varphi_{\mathfrak{m}^-}$, then let $\{C_\xi^{(\beta)}\}_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}^-}}$ be a wellordering of the set $\{A_\xi\}_{\xi < \beta}$. For every $\nu < \beta$ there is a $\xi_\nu < \varphi_{\mathfrak{m}^-}$ such that $A_\nu = C_{\xi_\nu}^{(\beta)}$. Let $A_\beta = B_\beta \cup \{x_\nu\}_{\nu < \beta}$, where $x_\nu \in (A_\nu - \bigcup_{\iota < \nu} A_\iota) - \bigcup_{\xi < \xi_\nu} C_\xi^{(\beta)}$. It is easy to see that the conditions 1—5 are satisfied.

We shall now prove some negative results concerning the question 1.

Theorem 1. *If* $\mathfrak{m}$ *is an arbitrary infinite cardinal number,* $\mathfrak{n} = 2$, *and, for every* $x \in E, \overline{\overline{f(x)}} = \mathfrak{m}$, *then* (*B*) *does not imply the existence of a subset of E with the property* $T(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$.

Proof. By the lemma 1 there is a sequence $\{E_\xi\}_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}}$ of subsets of $E$ with the properties 1—6 in the lemma 1. Let $\{x_\xi\}_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}}$ be any wellordering of $E$. Let now $f(x_\xi) = E_\xi$ for every $\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}$.

Theorem 2. *If* $\mathfrak{m}$ *is a singular cardinal number and for every* $x \in E, f(x) < \mathfrak{m}$, *then* (B) *does not imply the existence of a subset of E with the property* $T(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$.

Proof. There exist cardinal numbers $\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\xi, \ldots (\xi < \varphi_{\mathfrak{m}^*})$ such that $\mathfrak{m}_\beta > \mathfrak{m}_\alpha$ for $\beta > \alpha$ and $\mathfrak{m} = \sum_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}^*}} \mathfrak{m}_\xi$. Let $\{E_\xi\}_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}^*}}$ be a sequence of mutually disjoint subsets of $E$ such that $E = \bigcup_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}^*}} E_\xi$ and $\overline{\overline{E_\xi}} = \mathfrak{m}_\xi$. By the lemma 1 there is, for every $\xi$, a sequence $\{E_\nu^\xi\}_{\nu < \varphi_{\mathfrak{m}_\xi}}$ with the properties 1—6 in the lemma 1. Let $\{x_\nu^\xi\}_{\nu < \varphi_{\mathfrak{m}_\xi}}$ be any wellordering of $E_\xi$ and $f(x_\nu^\xi) = E_\nu^\xi$ for every $\xi < \varphi_{\mathfrak{m}^*}$ and $\nu < \varphi_{\mathfrak{m}_\xi}$. Obviously there is no subset of $E$ with the property $T(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$.

Theorem 3. *If* $\mathfrak{m} > \aleph_0$ *and* $\mathfrak{m}$ *has regular immediate predecessor, and for every* $x \in E, f(x) = \mathfrak{m}^-$, *then* (B) *does not imply the existence of a subset of E with the property* $T(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$.

Proof. Using the lemma 2, the proof is similar to the proof of theorem 1.

We shall now prove a positive result concerning to question 1.

Theorem 4. *If* $\overline{\overline{f(x)}} < \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} = \aleph_1$ *and* $\mathfrak{n} < \aleph_0$ *or* $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$ *for every ordinal number* $\beta$, $\mathfrak{m} = \aleph_{\alpha+1}$, $\mathfrak{r} = \aleph_\alpha$ $(\alpha > 1)$ *and* $\mathfrak{n} < \mathfrak{r}^*$, *then there exists a subset of E with the property* $T(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$.

Proof. Suppose that the theorem is false, i. e. if $M$ is a subset of $E$ for which $\overline{\overline{M}} < \mathfrak{m}$, then, for every subset $\Gamma$ of $E$ for which $\prod_\Gamma^f \subseteq M$, the power of the set $\sum_\Gamma^f$ is smaller than $\mathfrak{m}$. Define the sets $M_\beta$ and $K_\beta$ by transfinite induction as follows. Let $M_0$ be a subset of $E$, of power less than $\mathfrak{m}$, and et $K_0 = 0$. Let now $\beta$ be an ordinal number, $1 \leqq \beta < \varphi_{\mathfrak{m}}$, and suppose that all sets $M_\xi$ and $K_\xi$, where $0 \leqq \xi < \beta$, have been already defined such that $\overline{\overline{M}}_\xi < \mathfrak{m}$. Let $N_\beta = \bigcup_{\xi<\beta} M_\xi$. Obviously $\overline{\overline{N}}_\beta < \mathfrak{m}$. Let $K_\beta$ be a subset of $E$ such that:

1. $f(x) \cap (E - N_\beta) \neq 0$, *if* $x \in K_\beta$,
2. $\prod_{K_\beta}^f \subseteq N_\beta$ and
3. for every $x \in E - K_\beta$ there is an element $y$ of $K_\beta$ such that $f(x) \cap f(y)$ is not a subset of $N_\beta$.

Let

$$M_\beta = \sum\nolimits_{K_\beta}^f - N_\beta.$$

Obviously $M_\beta \neq 0$ and $\overline{\overline{M}}_\beta < \mathfrak{m}$. Let $M = \bigcup_{\xi<\varphi_{\mathfrak{n}}} M_\xi$. Clearly $\overline{\overline{M}} < \mathfrak{m}$ and $\overline{\overline{\bigcup_{\xi<\varphi_{\mathfrak{n}}} K}} < \mathfrak{m}$. Let $F$ be the set of all sets which have one and only one common element with every $M_\xi$ $(\xi < \varphi_{\mathfrak{n}})$. If $x \in E - \bigcup_{\xi<\varphi_{\mathfrak{n}}} K_\xi$, then for every $\xi$ there exists an element $y \in K_\xi$ such that $f(x) \cap f(y_\xi) \neq 0$, i. e. $M_\xi \cap f(x) \neq 0$. Thus for every $x \in E - \bigcup_{\xi<\varphi_{\mathfrak{n}}} K_\xi$ there exists a set $g(x) \in F$ such that $g(x) \subseteq f(x)$. Since $\overline{\overline{F}} \leqq \mathfrak{r}^{\mathfrak{r}^*} < \mathfrak{m}$, there exists a $g \in F$ and two distinct elements $x$ and $y$ of $E - \bigcup_{\xi<\varphi_{\mathfrak{n}}} K_\xi$ such that $g \subseteq f(x)$ and $g \subseteq f(y)$, which is impossible, since $\overline{\overline{f(x) \cap f(y)}} < \mathfrak{n}$.

We prove now some results concerning to the question 2.

Theorem 5. *If there is an element* $x_0 \in E$ *for which* $\overline{\overline{f(x_0)}} = \mathfrak{m}$, *then there exists a free subset of* $E$, *of power* $\mathfrak{m}$.

Proof. By the condition (B), for every element $y \in f(x_0)$, $\overline{\overline{f(y) \cap f(x_0)}} < \mathfrak{n}$. Let $g(x) = f(x) \cap f(x_0)$ for $x \in f(x_0)$. By the theorem V of [2] (with $f(x_0) = S$ and $f(x) = g(x)$ $(x \in S)$) there exists a free subset of power $\mathfrak{m}$ of $E$ with respect to $g(x)$. This subset is a free subset of $E$ with respect to $f(x)$.

Lemma 3. *If the condition* (B) *on the sets* $f(x)$ *implies the existence of a subset of* $E$ *with the property* $T(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$, *then the same condition implies the existence of a free subset of* $E$, *of power* $\mathfrak{m}$.

Proof. Let $g(x) = \{x\} \cup f(x)$ for every $x \in E$. Clearly the sets $g(x)$ satisfy the condition (B) for every $x \in E$. By the hypothesis there exists a subset $\Gamma$ of $E$, of power $\mathfrak{m}$, for which

$$\overline{\overline{\sum\nolimits_{\Gamma}^g}} = \mathfrak{m} \quad \text{and} \quad \overline{\overline{\prod\nolimits_{\Gamma}^g}} < \mathfrak{m}.$$

Put $G = \Gamma - \Pi_\Gamma^g$. Obviously $\overline{\overline{G}} = \mathfrak{m}$. $G$ is a free set. Indeed let $x$ and $y$ be two distinct elements of $G$. Then $x \notin f(y)$, since in the opposite case $x \in g(x) \cap g(y) \subset \Pi_\Gamma^g$, which is impossible. Similarly $y \notin f(x)$.

From lemma 3, and theorem 4 we deduce

T h e o r e m 6. *If* $\overline{\overline{f(x)}} < \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} = \aleph_1$ *and* $\mathfrak{n} < \aleph_0$ *or* $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$ *for every ordinal number* $\beta$, $\mathfrak{m} = \aleph_{\alpha+1}$, $\mathfrak{r} = \aleph_\alpha$ *and* $\mathfrak{n} < \mathfrak{r}^*$, *then there exists a free subset of* $G$, *of power* $\mathfrak{m}$.

T h e o r e m 7. *If* $\mathfrak{m}$ *is singular,* $\overline{\overline{f(x)}} < \mathfrak{m}$ *for every* $x \in E$ *and* $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ *for every ordinal number* $\alpha$, *then there exists a free subset of* $E$, *of power* $\mathfrak{m}$.

The proof of this theorem is analogous to the proof of the second part of the theorem V of [2], if we use theorem 6 of this paper instead of the first part of theorem V of [2].

Now we prove the following

L e m m a 4. *Let* $F$ *be an arbitrary subset of* $E$, *of power* $\mathfrak{m}$. *The condition* (B) *on the sets* $f(x)$ *implies the existence of an element* $x$ *of* $F$ *such that* $\overline{\overline{F - f^{-1}(x)}} = \mathfrak{m}$, *where* $f^{-1}(x) = \{y\colon x \in f(y)\}$.

P r o o f. Suppose that the lemma is false. Then there is a subset $L$ of $E$, of power $\mathfrak{m}$, such that for every $x \in L$

$$\overline{\overline{F - f^{-1}(x)}} < \mathfrak{m}.$$

There is no loss of generality in assuming that $L = E$. We consider two cases. First suppose that $\mathfrak{m}$ is regular. Let $N$ be an arbitrary subset of $E$, of power greater than $\mathfrak{n}$. Since $\mathfrak{m}$ is regular by the hypothesis, we have

$$\overline{\overline{\bigcup_{x \in N} (E - f^{-1}(x))}} < \mathfrak{m}.$$

Suppose now that $\mathfrak{m}$ is singular. There exist regular cardinal numbers $\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_1 \ldots, \mathfrak{m}_\xi, \ldots (\xi < \varphi_{\mathfrak{m}^*})$ such that $\mathfrak{m}_\beta > \mathfrak{m}_\alpha > \max(\mathfrak{m}^*, \mathfrak{n})$ for $\beta > \alpha$ and

$$\mathfrak{m} = \sum_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}^*}} \mathfrak{m}_\xi.$$

Consider an arbitrary subset $M$ of $E$, of power $\mathfrak{m}_0$. Let $M_\xi$ be the set of all elements of $M$ for which $\overline{\overline{E - f^{-1}(x)}} < \mathfrak{m}_\xi$. Obviously

$$M = \bigcup_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}^*}} M_\xi.$$

Since $\mathfrak{m}_0$ is regular and $\mathfrak{m}_0 > \mathfrak{m}^*$, there exists an ordinal number $\xi_0$ such that $\overline{\overline{M}}_{\xi_0} = \mathfrak{m}_0$. Obviously the power of the set

$$\bigcup_{x \in M_{\xi_0}} (E - f^{-1}(x))$$

is not greater than $\mathfrak{m}_0 \mathfrak{m}_{\xi_0}$ $(< \mathfrak{m})$. Let now $H = N$ if $\mathfrak{m}$ is regular and $H = M_{\xi_0}$ if $\mathfrak{m}$ is singular. Put $K = \bigcup_{x \in H} (E - f^{-1}(x))$. Clearly $\overline{\overline{E - (K \cup H)}} = \mathfrak{m}$ and by the definition

$$E - (H \cup K) \subseteq f^{-1}(x)$$

for every $x \in H$. It follows that

$$H \subseteq f(y)$$

for every $y \in E-(H \cup K)$ which is impossible, because $\overline{\overline{f(x) \cap f(y)}} < \mathfrak{n}$ for every distinct $x, y \in E$ and $\overline{\overline{H}} \geqq \mathfrak{n}$. This contradiction proves the lemma.

Without using the generalised continuum hypothesis we now prove

Theorem 8. *If $\mathfrak{m}$ is an arbitrary infinite cardinal number and $f(x) < \mathfrak{m}$ for every $x \in E$, then there exists a free subset of $E$, of power $\aleph_0$.*

Proof. Let $x_0$ be an element of $E$ for which $\overline{\overline{E-f^{-1}(x_0)}} = \mathfrak{m}$ and $k$ a natural number, $k > 0$, and suppose that all elements $x_j$, where $0 \leqq j < k$, have been already defined such that the power of the set

$$E_k = E - \bigcup_{j<k} f(x_j) - \bigcup_{j<k} f^{-1}(x_j)$$

is equal to $\mathfrak{m}$. By the lemma 4 there is an element $y$ of $E_k$, such that $\overline{\overline{E_k - f^{-1}(y)}} = \mathfrak{m}$. Let $x_k = y$. The set $\{x_j\}_{j<\omega}$ is obviously free.

## II.

We assume in this section that the sets $f(x)$ satisfy condition (C).

Theorem 9. (C) *does not imply the existence of a subset of $E$ with the property $T(2, \mathfrak{m})$ and it does not imply the existence of an independent pair.*

Proof. It is sufficient to consider the case where $f(x) = E - \{x\}$.

The theorems 2 and 3 show that the additional assumption that $\overline{\overline{f(x)}} < \mathfrak{m}$ for every $x \in E$ does not imply the existence of a subset of $E$ with the property $T(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$.

We prove now the following

Lemma 5. *If $\mathfrak{m}$ is regular, $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$, and $\overline{\overline{f(x)}} < \mathfrak{m}$ for every $x \in E$, then* (C) *implies the existence of an element $x \in E$ such that $\overline{\overline{E-f^{-1}(x)}} = \mathfrak{m}$.*

Proof. Suppose that the lemma is false. Then for every $x \in E$, $\overline{\overline{E-f^{-1}(x)}} < \mathfrak{m}$. Let $A = \bigcup_{y \in f(x)} (E - f^{-1}(y))$. Obviously $\overline{\overline{A}} < \mathfrak{m}$, because $\overline{\overline{f(x)}} < \mathfrak{m}$ and $\mathfrak{m}$ is regular. If $z \in E - A$, then $f(z) \supset f(x)$, which contradicts the condition (C).

Theorem 10. *If $\mathfrak{m}$ is regular, $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$, and $\overline{\overline{f(x)}} < \mathfrak{m}$ for every $x \in E$, then* (C) *implies the existence of an independent pair.*

Proof. By the lemma 5, there is an element $x$ of $E$ such that $\overline{\overline{E-f^{-1}(x)}}=\mathfrak{m}$. Let $y \in E-f^{-1}(x)-f(x)$. Obviously the set $\{x, y\}$ is free.

Theorem 11. *If* $\mathfrak{m}$ *is regular,* $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$ *and* $\overline{\overline{f(x)}} \leqq \mathfrak{m}$ *for every* $x \in E$ *then* (C) *does not imply the existence of a free subset of power greater than* 2.

Proof. Let $E_1$ and $E_2$ two mutually disjoint subsets of $E$, of power $\mathfrak{m}$, such that $E=E_1 \cup E_2$. Let $\{x_\eta^1\}_{\eta<\varphi_{\mathfrak{m}}}$ and $\{x_\eta^2\}_{\eta<\varphi_{\mathfrak{m}}}$ be wellorderings of $E_1$ and $E_2$, respectively. If $x=x_\eta^1 \in E_1$, then let

$$f(x)=\{x_\xi^1\}_{\xi<\eta} \cup \{x_\eta^2\}$$

and if $x=x_\eta^2 \in E_2$, then let

$$f(x)=\{x_\xi^2\}_{\xi<\eta} \cup \{x_\eta^1\}.$$

It is easy to see that the sets $f(x)$ satisfy the condition (C) and there does not exist a free subset of power greater than 2.

Theorem 12. *If* $\mathfrak{m}$ *is singular and* $\overline{\overline{f(x)}}<\mathfrak{m}$ *for every* $x \in E$ *,then* (C) *does not imply the existence of an independent pair.*

Proof. Let $E=\{\nu : \nu<\varphi_{\mathfrak{m}}\}$ and for every ordinal number $\nu<\varphi_{\mathfrak{m}}$, $h_\nu=\{\beta_\xi^{(\nu)}\}_{\xi<\varphi_{\mathfrak{m}^*}}$ a subset of type $\varphi_{\mathfrak{m}^*}$ such that $\lim\limits_{\xi<\varphi_{\mathfrak{m}^*}} \beta_\xi^\nu=\varphi_{\mathfrak{m}}$ and $h_\mu \cap h_\nu=0$ for $\mu \neq \nu$. Let now $f(\nu)=E_1^{(\nu)} \cup E_2^{(\nu)}$ where $E_1^{(\nu)}=h_\nu$ and $E_2^{(\nu)}=\{\gamma : \gamma \leqq \nu\}$. Obviously the sets $f(x)$ satisfy the condition (C) and does not exist an independent pair.

## III.

We assume in this section that on the sets $f(x)$ the condition (D) holds.

Theorem 13. (D) *implies the existence of a subset with the property* $T(\mathfrak{m}^*, 1)$ *i. e. there is a subset* $M$ *of power* $\mathfrak{m}^*$ *such that* (W) *if* $x, y \in M$ *and* $x \neq y$, *then* $f(x) \cap f(y)=0$.

Proof. Suppose the contrary. Then the power of a set with the property (W) is less than $\mathfrak{m}^*$. Let $N$ be a maximal set with respect to the property (W), i. e. if $x \notin N$, then there exists an element $y \in N$ such that $f(x) \cap f(y) \neq 0$. We define the sets $N_a$ $(a \in N)$ as follows: Let the element $y$ of $E-N$ be an element of $N_a$, if $f(y) \cap f(a) \neq 0$. Since $\overline{\overline{N}}<\mathfrak{m}^*$ there is an element $b \in N$ for which $\overline{\overline{N_b}}=\mathfrak{m}$, which contradicts (D).

Theorem 14. *If* $\mathfrak{m}$ *is singular and* $n=3$ *then* (D) *does not imply the existence of a subset with the property* $T(\mathfrak{m}, 1)$.

Proof. Let $\{E_\xi\}_{\xi<\varphi_{\mathfrak{m}^*}}$ be a sequence of type $\varphi_{\mathfrak{m}^*}$, of mutually disjoint subsets of $E$ such that

$$E = \bigcup_{\xi<\varphi_{\mathfrak{m}^*}} E_\xi,$$

$\overline{\overline{E_\xi}} = \mathfrak{m}_\xi < \mathfrak{m}$ and $\mathfrak{m}_\eta < \mathfrak{m}_\nu$ for $\eta < \nu$. Let $\{x^\xi_\eta\}_{\eta<\varphi_{\mathfrak{m}_\xi}}$ be any wellordering of the type $\varphi_{\mathfrak{m}_\xi}$, of $E_\xi$. We define the sets $f(x)$ as follows: if $x^\xi_\eta \in E_\xi$, then let $f(x) = \{x^\xi_0, x^\xi_\eta\}$. Obviously the sets $f(x)$ satisfy the condition (D), and does not exist a subset of $E$ with the property $T(\mathfrak{m}, 1)$.

Theorem 15. (D) *implies the existence of a free subset of $E$, of power* $\mathfrak{m}^*$.

Proof. We consider two cases: a) $E$ has a subset $F$ of power $\mathfrak{m}$ such that, if $x \in E_1$, then $\overline{\overline{f(x)}} = \mathfrak{m}$, b) there is no such a subset of power $\mathfrak{m}$.

In the case a) we prove the following

Lemma 6. *If $M \subset E$ and $\overline{\overline{M}} < \mathfrak{m}^*$, then* $\overline{\overline{E - \bigcup_{x\in M} f(x)}} = \mathfrak{m}$.

Proof. Suppose the contrary, i.e. $E$ has a subset $M$ such that $\overline{\overline{M}} < \mathfrak{m}^*$ and $\overline{\overline{E - \bigcup_{x\in M} f(x)}} < \mathfrak{m}$. Then there is an element $y$ of $M$ such that $\overline{\overline{f(y)}} = \mathfrak{m}$ and $f(y)$ has a subset $F(y)$ of power $\mathfrak{m}$ such that, if $z \in F(y)$, then $\overline{\overline{f(z)}} = \mathfrak{m}$. Since $\overline{\overline{M}} < \mathfrak{m}^*$, it follows from (D) that the set $F(y)$ has an element $z_0$ for which $f(z_0) \cap f(z) = 0$ for every $z \in M$. Thus $f(z_0) \subset E - \bigcup_{x\in M} f(x)$ which is impossible because $\overline{\overline{f(z_0)}} = \mathfrak{m}$.

Let $E_1 = \{y : \overline{\overline{f(y)}} < \mathfrak{m}\}$. Further let $V = E$ in the case a), $V = E_1$ in the case b) and $\{x_\nu\}_{\nu<\varphi_{\mathfrak{m}}}$ any wellordering of the type $\varphi_{\mathfrak{m}}$, of $V$. We define the sequence $\{y_\nu\}_{\nu<\varphi_{\mathfrak{m}^*}}$ as follows: Put $y_0 = x_0$. Let now $\beta$ be an ordinal number, $1 \leqq \beta < \varphi_{\mathfrak{m}^*}$, and suppose that all elements $y_\xi$, where $0 \leqq \xi < \beta$, have been already defined. Let $F_\beta = \{x_\nu\}_{\nu<\varphi_{\mathfrak{m}}} - (\{y_\nu\}_{\nu<\beta} \cup (\bigcup_{\nu<\beta} f(y_\nu))$.

We now prove $\overline{\overline{F_\beta}} = \mathfrak{m}$. In case b) this is clear and in case a) it follows from lemma 6 $(M = \{y_\nu\}_{\nu<\beta})$.

Let $D_\beta$ be the set of elements $y \in F_\beta$ for which there is a $\nu < \beta$ such that $y_\nu \in f(y)$. Since $\overline{\overline{\beta}} < \mathfrak{m}^*$, by (D), $\overline{\overline{D_\beta}} < \mathfrak{m}$. It follows that $\overline{\overline{F_\beta - D_\beta}} = \mathfrak{m}$. Let $y_\beta$ be the first element of $F_\beta - D_\beta$. Thus the set $\{y_\nu\}_{\nu<\varphi_{\mathfrak{m}^*}}$ is defined. Put $E' = \{y_\nu\}_{\nu<\varphi_{\mathfrak{m}^*}}$. Clearly the set $E'$ is free and $\overline{\overline{E'}} = \mathfrak{m}^*$.

Theorem 16. *If $\mathfrak{m}$ is singular, then the condition* (D) *on the sets $f(x)$ does not imply the existence of a free subset of $E$, of power* $\mathfrak{m}$.

Proof. Let $\{E_\xi\}_{\xi<\varphi_{\mathfrak{m}^*}}$ be a sequence of type $\varphi_{\mathfrak{m}^*}$, of mutually disjoint subsets of $E$ such that

$$E = \bigcup_{\xi<\varphi_{\mathfrak{m}^*}} E_\xi,$$

$\overline{\overline{E}}_\xi = \mathfrak{m}_\xi < \mathfrak{m}$ and $\mathfrak{m}_\eta < \mathfrak{m}_\nu$ for $\eta < \nu$. Let $\{x_\eta^\xi\}_{\eta<\varphi_{\mathfrak{m}_\xi}}$ be any wellordering of the type $\varphi_{\mathfrak{m}_\xi}$ of $E_\xi$. We define the sets $f(x)$ as follows: if $x = x_\eta^\xi \in E$, then let $f(x) = \{x_\zeta^\xi\}_{\zeta<\eta}$. It is obvious that the sets $f(x)$ satisfy (D) and there does not exist a free subset of $E$ of power $\mathfrak{m}$.

## IV.

We assume in this section that the sets $f(x)$ satisfy (A), and we give the solutions of questions a) and b).

Lemma 7. *If $\mathfrak{m} > \aleph_1$, and there is a regular cardinal number $\mathfrak{r}$ for which $\aleph_0 < \mathfrak{n} \leqq \mathfrak{r} < \mathfrak{m}$, then to every element $x$ of $E$ there corresponds a closed subset $g(x)$ of $E$ such that $x \in g(x)$ and $\overline{\overline{g(x)}} < \mathfrak{r}$.*

Proof. Let $x$ be a given element of $E$ and

$$\{x\} \cup f(x) = E_1,\ f(E_1) = E_2, \ldots,\ f(E_{k-1}) = E_k, \ldots$$

It is easy to see that $\overline{\overline{E}}_k < \mathfrak{r}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Put $g(x) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Theorem 17. *If there exists a regular cardinal number $\mathfrak{r}$ such that $\aleph_0 < \mathfrak{n} \leqq \mathfrak{r} < \mathfrak{m}$, then* (A) *implies the existence of a closed proper subset of $E$, of power* $\mathfrak{m}$.

Proof. By lemma 7 to every $x \in E$ there corresponds a closed subset $g(x)$ of $E$ such that $\overline{\overline{g(x)}} < \mathfrak{r}$. By a lemma of [3] (see p. 55) there is a subset $F$ of $E$ for which $\overline{\overline{F}} = \mathfrak{m}$ and

$$E - \bigcup_{x \in F} g(x) \neq 0.$$

Since $\bigcup_{x\in F} g(x)$ is obviously closed, the theorem is proved.

Theorem 18. *If $\mathfrak{m} > \aleph_0$, $\mathfrak{m}^-$ is singular and $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}^-$, then* (A) *does not imply the existence of a closed proper subset of $E$, of power* $\mathfrak{m}$.

Proof. Let $\{E_\beta\}_{\beta<\varphi_\mathfrak{m}}$ be a sequence of the type $\varphi_\mathfrak{m}$, of mutually disjoint subsets of $E$ such that $E = \bigcup_{\beta<\varphi_\mathfrak{m}} E_\beta$ and $\overline{\overline{E}}_\beta = \mathfrak{m}^-$ $(\beta < \varphi_\mathfrak{m})$. Further let $\{x_\alpha^{(\beta)}\}_{\alpha<\varphi_\mathfrak{m}}$ be a wellordering of the type $\varphi_{\mathfrak{m}^-}$ of $E_\beta$. We define the sets $f(x)$ as follows: Let $\{\alpha_\nu\}_{\nu<\varphi_{(\mathfrak{m}^-)^*}}$ be a set of type $\varphi_{(\mathfrak{m}^-)^*}$ of ordinal numbers such that $\lim_{\nu<\varphi_{(\mathfrak{m}^-)^*}} \alpha_\nu = \varphi_{\mathfrak{m}^-}$. If $\beta > 0$, then let $H_\beta$ be a one to one mapping of the set $\{x_\alpha^{(\beta)}\}_{\alpha<\varphi_{\mathfrak{m}^-}}$ onto the set $\{x_\alpha^{(\gamma)}\}_{\alpha<\varphi_{\mathfrak{m}^-}}^{\gamma<\beta}$. Since the powers of both sets are equal to $\mathfrak{m}^-$ there is such a mapping. If $x=x_\alpha^{(\beta)}\in E_\beta$, then let

$$f(x)=E_1^{(x)}\cup E_2^{(x)}\cup E_3^{(x)}$$

where $E_1^{(x)}=\{x_\gamma^{(\beta)}\}_{\gamma<\alpha}$, $E_2^{(x)}=\{x_{\alpha_\nu}^{\beta^-}\}_{\nu<\varphi(\mathfrak{m}^-)^*}$, further $E_3^{(x)}=0$, if $\beta=0$ and $E_3^{(x)}=\{H_\beta(x)\}$ if $\beta>0$.

Obviously $\overline{\overline{f(x)}}<\mathfrak{n}$ for every $x\in E$. If $g(x)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$, where $E_1=f(x)$ and $E_k=f(E_{k-1})$ for $k>1$, then by the definition of $f(x)$, for $x=x_\alpha^{(\beta)}$,

$$g(x_\alpha^\beta)=\bigcup_{\varrho\leqq\beta}\{x_\alpha^{(\varrho)}\}_{\alpha<\varphi_{\mathfrak{m}^-}}.$$

It follows that $E$ does not have a closed proper subset of power $\mathfrak{m}$.

Theorem 19. *If there exists a regular cardinal number* $\mathfrak{r}$ *such that* $\aleph_0<\mathfrak{n}\leqq\mathfrak{r}<\mathfrak{m}$, *then* (A) *implies the existence of two almost disjoint closed subsets of* $E$, *of power* $\mathfrak{m}$. *If* $\mathfrak{m}\,(\neq\aleph_{\alpha+\omega})$ *is the sum of* $\mathfrak{n}$ *cardinal numbers, each of which is smaller than* $\mathfrak{n}$, *we assume the generalised continuum hypothesis.*

Proof. By the lemma 7 to every $x\in E$ there corresponds a closed subset $g(x)$ of $E$ such that $\overline{\overline{g(x)}}<\mathfrak{r}$. By the theorems 1, 6, and 8 of [4], there is a subset $\Gamma$ of power $\mathfrak{m}$ of $E$, for which

$$\overline{\overline{\prod_\Gamma^g}}<\mathfrak{m} \quad\text{and}\quad \overline{\overline{\sum_\Gamma^g}}=\mathfrak{m}.$$

Let $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ such that $\Gamma_1\cap\Gamma_2=0$ and $\overline{\overline{\Gamma_1}}=\overline{\overline{\Gamma_2}}=\mathfrak{m}$. Let $E_1=\bigcup_{x\in\Gamma_1}g(x)$ and $E_2=\bigcup_{x\in\Gamma_2}g(x)$. Obviously $E_1$ and $E_2$ are almost disjoint closed sets of power $\mathfrak{m}$.

Theorem 20. *If* $\mathfrak{m}>\aleph_0$, $\mathfrak{m}^-$ *is singular and* $\mathfrak{n}=\mathfrak{m}^-$, *then* (A) *does not imply the existence of two almost disjoint closed subsets of* $E$, *of power* $\mathfrak{m}$.

This follows from the proof of Theorem 18.

## References.

[1] Sophie Piccard, Sur un problème de M. Ruziewicz de la théorie des relations, *Fundamenta Math.*, **29** (1937), 5—9.

[2] P. Erdős, Some remarks on set theory, *Proceedings American Math. Soc.*, **1** (1950), 127—141.

[3] P. Erdős, Some remarks on set theory III, *Michigan Math. Journal*, **2** (1953), 51—57.

[4] G. Fodor, Some results concerning a problem in set theory, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 232—240.

*(Received May 1, 1956.)*

# Bibliographie.

**L. Bieberbach, Analytische Fortsetzung,** IV+167 Seiten, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.

Das Buch beschäftigt sich mit demjenigen — vielleicht interessantesten—Fragekreis der Weierstaßschen Funktionentheorie, welche die Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten eines Funktionelementes einerseits und den singulären Stellen der Funktion und deren Charakter andererseits betrifft. Seit der in 1929 erschienenen großzügigen Arbeit von Pólya entstand eine ausgedehnte Literatur in dieser Richtung, und der Vert. gibt in diesem Buch ihre erste systematische Bearbeitung und Zusammenfassung. Er gibt kurze aber durchsichtige Besprechungen auch für diejenigen Abhandlungen, zu welcher detaillierten Behandlung er nicht abschweifen könnte. Die Behandlung berücksichtigt immer auch historische Gesichtspunkte, und einzelne Tatsachen sind auf mehreren Seiten beleuchtet.

In Kapitel I macht der Verf. die Haupthilfsmittel und Methoden bekannt, welche er später benützt. So z. B. die Laplace—Borelsche Transformation, welche eine Möglichkeit gibt die Singularitäten einer Funktion im Endlichen durch das Indikator-diagramm einer ganzen Funktion zu studieren, den Hadamardschen Multiplikationssatz, und das wichtigste Singularitätskriterium, durch Eulertransformation abgeleitet.

In Kapitel II beschäftigt sich der Verf. mit Resultaten, welche sich um die klassischen Sätze von Fabry konzentrieren. Hierher gehören im Wesentlichen Sätze dreierlei Art:

*a*) solche, welche aus der Dichte der „komplexen Vorzeichenwechseln" der Koeffizienten die Existenz einer singulären Stelle auf einem gewissen Bogen des Konvergenzkreises sichern,

*b*) solche, welche aus der Dichte der nichtverschwindenden Koeffizienten über die singulären Punkte einen Aufschluß geben,

*c*) solche, welche den Zusammenhang zwischen dem Verhalten des Quotienten benachbarter Koeffizienten und den singulären Stellen zeigen.

Kapitel III weist auf die andere Seite des in *b*) erwähnten Zusammenhanges von Koeffizientendichte und Singularitäten hin, nämlich in welchem Maße die Anzahl und Charakter der Singularitäten die Dichte der nichtverschwindenden bzw. der „kleinen" Koeffizienten bestimmen.

Kapitel IV, welches sich mit der Verteilung der fortsetzbaren und nichtfortsetzbaren Potenzreihen beschäftigt, zeigt in verschiedenen Formen die Tatsache, daß die Mehrzahl der Potenzreihen mit endlichem Konvergenzkreis nichtfortsetzbar über den Konvergenzkreis sind.

Kapitel V behandelt Sätze, die sich dem Hadamardschen Multiplikationssatz anknüpfen; aus der Kenntnis der Lage und des Charakters der singulären Stellen der Reihen $\sum a_n z^n$ und $\sum b_n z^n$ werden Aufschlüsse auf die Lage und auf den Charakter der singulären Stellen der Produktreihe $\sum a_n b_n z^n$ gegeben.

Kapitel VI bearbeitet diejenigen schönen Sätze, bei welchen die Koeffizienten arithmetische Bedingungen erfüllen. Besonders wichtig sind die Fälle der Potenzreihen mit endlich vielen Koeffizienten bzw. die mit ganzen rationalen Koeffizienten; in beiden Fällen kann man behaupten, daß sie entweder rationale Funktionen darstellen, oder nichtfortsetzbar sind.

Im Schlußkapitel, zurückkehrend zu einer Frage, welche schon im ersten Kapitel berührt wurde, gibt der Verf. Orientation über die singulären Punkte im Endlichen der Funktion mit dem Funktionselement $\sum a_n z^n$ im Falle $a_n = \varphi(n)$, wo $\varphi(z)$ eine Funktion bedeutet, die in einer gewissen Umgebung von $z = \infty$ regulär ist.

Die Formulierung einiger Sätze und Definitionen ist nicht ganz einwandfrei: die präzise Bedeutung tritt aber aus den Beweisen klar hervor. Das Buch ist leicht lesbar und anregend auch für diejenigen, die nicht auf diesem Feld arbeiten.

*Vera T. Sós* (Budapest)

**Ludwig Schläfli, Gesammelte mathematische Abhandlungen.** Band III, 402 Seiten. Herausgegeben vom Steiner—Schläfli—Komitee der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, Basel, Verlag Birkhäuser, 1956.

Der vorliegende dritte Band Schläflis gesammelter Abhandlungen enthält die Früchte der beiden letzten Dezenien seiner schöpferischen Tätigkeit. Es beginnt mit einer Übertragung in den $n$-dimensionalen Raum des Satzes, nach dem zwei, bezüglich eines Kegelschnittes polare Dreiecke stets perspektiv sind. Diese Abhandlung gab Anregung zu Arbeiten von Berzolari, Brusotti, B. Segre und anderen. In der folgenden Arbeit wird u. a. der Inhalt eines $n$-dimensionalen sphärischen Sektors mit Hilfe der Besselschen Funktionen berechnet. Dadurch wird zu den Hauptresultaten der Theorie der vielfachen Kontinuität ein neuer Zugang gewonnen.

Es folgen mehrere Abhandlungen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, darunter eine umfangreiche Arbeit über die Lösung eines allgemeinen Pendelproblems durch elliptische Funktionen, die Behandlung wichtiger Eigenschaften der Besselschen Funktionen im Zusammenhang mit der Riccatischen Differentialgleichung, Bemerkungen über die Laplacesche Gleichung und — nach zwei kleineren Aufsätzen über die Gleichung fünften Grades bzw. über Abelsche Integrale — eine größere Arbeit über die Differentialgleichung der linearen Wärmeleitung.

Der übrige Teil des Bandes enthält hauptsächlich Schläflis fundamentale Beiträge zur Funktionentheorie, insbesondere zu den Besselschen Funktionen, den elliptischen Modularfunktionen und den Kugelfunktionen.

Aus Schläflis Bemerkungen über den Dirichletschen Konvergenzbeweis der Fourier-Reihen sieht man, wie wenig der Unterschied zwischen punktweise und gleichmäßige Konvergenz noch vor etwa 80 Jahren verbreitet war. Obwohl in dieser Hinsicht selbst Schläfli einem Mißverständis zum Opfer fiel, bewundern wir seinen starken kritischen Sinn, womit er jeder Sache selbständig auf den Grund kommen will. In einer anderen mathematisch-philosophischen Schrift wendet er sich mit Scharfsinn gegen die Kantsche Raumauffassung, was zu jener Zeit ein noch ziemlich aktuelles Problem gewesen war. Diese Arbeiten gestatten uns einen Einblick in das oft kampfreiche Zustandekommen für uns natürlicher und geläufiger Sachen.

Zum Schluß sei die sehr bedeutende Arbeit über Räume konstanter Krümmung hervorgehoben, in der die (seit dem bestätigte) berühmte Vermutung bezüglich der Einbettung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit in einen Euklidischen Raum ausgesprochen wird. Aus dem Datum seiner letzten Arbeit (1885) erfahren wir, daß SCHLÄFLIS schöpferische Kraft nicht einmal über seinem siebzigsten Lebensjahr erschöpft war.

In SCHLÄFLIS Arbeiten blätternd haben wir das Gefühl nicht nur mit dem Gelehrten, sondern auch mit dem Lehrer, ja sogar mit dem Menschen in Kontakt zu treten. Wir sehen ihn vor uns, als er sich um die Lösung der allgemeinen Pendelaufgabe „vergeblich" bemüht, oder als ihn während der Korrektur seiner Arbeit über die Heineschen Kugelfunktionen „die traurige Nachricht" vom Heines Tod „überraschte". Dieser unmittelbare Stil, der oft auch die Motiven der Entstehung mancher Entdeckungen verrät, trägt dazu bei, daß SCHLÄFLIS Abhandlungen auch heute noch anregend wirken. Besonders bezieht sich das auf die im vorliegenden Band dargestellten Abhandlungen des reifen Mathematikers. Ja, diese Abhandlungen werden noch Jahrhunderte lang modern bleiben und immer eine Frische aus sich ergießen!

*L. Fejes Tóth* (Budapest)

**Hans Wittich, Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen** (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 8), IV + 163 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1955.

WITTICH's book joins closely to R. NEVANLINNA's monograph: „Eindeutige analytische Funktionen", and its purpose is to complete the latter, partly with special questions, omitted from this owing to lack of space, partly with the newest results referring to the subject.

Chapter I expounds the theory of WIMAN—VALIRON about the maximal term, and applies it to the proof ot the „little" theorem of PICARD.

Chapter II gives a short summary of the two fundamental theorems of the value distribution theory of R. NEVANLINNA, and of their most important consequences. Further consequences of the fundamental theorems are treated in Chapter III. Among others we find there HAYMAN's example for an integral function with a defective value that is not an asymptotic value, and of the connection between the value distribution theory and the theory of covering surfaces.

Chapter IV is devoted to the converse of the second fundamental theorem. The matter in question is that in the case of meromorphic functions possessing a Riemann surface of a sufficiently simple type, the inequality expressing the second fundamental theorem may be replaced by an asymptotic equality.

Chapter V deals with the applications of the former results to the theory of ordinary differential equations. Among the many interesting results, we mention the following two theorems:

I. Let $P(x, y_0, y_1, \ldots, y_p)$ be a polynomial ($p \geqq 1$), let $f(w)$ be a transcendental entire function, and suppose that the entire function $w(z)$ satisfies the differential equation:

$$P(z, w, w', \ldots, w^{(p)}) = f(w).$$

Then $w(z) \equiv$ const. II. Suppose that the degrees of the polynomials $a_\mu(z)$ ($\mu = 0, 1, \ldots, p+1$) do not exceed the degree of $a_0(z)$ and that the entire function $w(z)$ satisfies the differential equation:

$$\sum_{\mu=0}^{p} a_\mu(z)\, w^{(p-\mu)}(z) + a_{p+1}(z) = 0.$$

Then $w(z)$ is at most of order 1. (The latter theorem is due to PERRON.) The other results have a similar character.

Chapter VI is devoted to conformal and quasi-conformal mappings. These researches give important help namely for the discussion of some types of Riemann surfaces.

It is well known that a Riemann surface belongs to the elliptic, parabolic, or hyperbolic type, according that it is the conform image of the closed plane, the open plane, or the unit circle, respectively. Further it is well known that the structural conditions of Riemann surfaces of certain simple types can be characterized by a graph. Chapter VII deals with those criteria, which permit to conclude from the structure of this graph to the type of the Riemann surface.

Chapter VIII deals with the following problem of the value distribution theory. To each point $a_j$ of a sequence $\{a_j\}$ we attach two numbers: $\delta_j \geqq 0$, $\vartheta_j \geqq 0$, $0 \leqq \delta_j + \vartheta_j \leqq 1$, so that $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_j + \sum_{j=1}^{\infty} \vartheta_j = 2$. The question is, whether there exists a meromorphic function, which has in the point $a_j$ the defect $\delta_j$, and the ramification index $\vartheta_j$.

The last Chapter is devoted to certain problems, connected with analytic functions having a finite Dirichlet integral. Among these there are some extremum problems, further the problem of finding criteria in order that in a given domain there exists an analytic function, having a finite Dirichlet integral. (E. g., in the domain $|z| < \infty$ there exists no such function.)

Finally some minor remarks: In Chapter I the author mentions a theorem of SAXER (1923) which gives a generalization of the little Picard theorem, in the direction of BOREL. At the same time, he does not mention a much more general result of P. CSILLAG.[1])

The proof of formula (2) on page 88 is correct only if $d$ denotes (instead of the distance of the curves $\Gamma_0$ and $\Gamma_1$) the lowest upper bound of the radiuses of the circles contained entirely in the annular region. However, by the construction connected with figure 5, the author takes this circumstance correctly in consideration.

The book gives account also of the most recent publications. As a matter of fact, about one third of the numerous papers whose results are dealt with in the book, was published in the last five years.

The book deserves the interest of any mathematician working in function theory

*Tamás Kővári* (Budapest)

**A. Monjallon, Initiation au calcul matriciel,** 132 pages, Paris, Librairie Vuibert, 1955

Ce petit livre n'est pas écrit pour les mathématiciens, mais à l'usage des élèves des Écoles des Ingénieurs, des ingénieurs et des physiciens, c'est pourquoi il nous semble légitime que l'exposé laisse certaines démonstrations délibérément de côté. L'auteur s'est limité — comme il dit dans son avant-propos — aux éléments les plus simples, réunis dans un exposé direct et très concret, appuyé sur de nombreux exemples numériques. L'opuscule se compose de six chapitres: Matrices (I); Déterminants (II); Premières applications aux systèmes d'équations linéaires (III); Autres propriétés des matrices (IV); Formes quadratiques (V); Compléments (VI). On trouve à la fin un choix d'exercices numériques. D'après notre opinion, la matière serait mieux ordonnée du point de vue pédagogique, si l'on faisait connaître avant la définition de la matrice et du déterminant certains problèmes, qui font pratique l'introduction de ces notions.

*O. Steinfeld* (Szeged)

[1]) PAUL CSILLAG, Untersuchungen über die Borelschen Verallgemeinerungen des Picardschen Satzes, *Math. Annalen,* **100** (1928), 367—380.

**Abraham Robinson, Théorie métamathématique des idéaux** (Collection de logique mathématique, Série A, fascicule VIII), 186 pages, Paris et Louvain, Gauthier-Villars et E. Nauwelaerts, 1955.

Dans le passé on a regardé la logique symbolique surtout comme un instrument de la critique philosophique des sciences. Mais, des recherches récentes ont révélé que l'état actuel de cette discipline permet d'en faire des applications effectives à différentes branches des mathématiques.

Dans cette monographie on considère des structures mathématiques dont les axiomes peuvent être formulés dans le symbolisme de ce qu'on appelle calcul fonctionnel de premier ordre. Après une introduction générale on présente d'abord quelques considérations préliminaires sur les espaces topologiques et les ensembles partiellement ordonnés, puis on expose les fondements de la théorie des systèmes déductifs de Tarsky et de la langue formelle dans laquelle sont formulés les axiomes et les propriétés des structures mathématiques considérées à la suite. Après avoir introduit le concept métamathématique des structures algébriques, on développe la thérie de certaines structures concrètes, en particulier celle des idéaux de polynômes et de leurs variétés.

Les deux derniers chapitres sont consacrés aux applications, parmi lesquelles on trouve et des démonstrations nouvelles de théorèmes connus et des nouveaux théorèmes très intéressants. On peut citer par exemple la démonstration du théorème de Hilbert—Netto sur les variétés des idéaux de polynômes ou le développement de la théorie des idéaux différentiels de Ritt; ainsi que les théorèmes dits "théorèmes de transfert" dans lesquels il s'agit d'assertions de type suivant: Toutes les propositions d'une certaine classe qui sont vraies pour des structures de type particulier sont vrais aussi pour certaines autres structures. Comme une application d'une autre espèce on peut citer encore un théorème appartenant à la théorie des réseaux: Tout réseau infini qui admet un coloriage d'ordre $k$ inclut un sous-réseau fini avec la même propriété.

En ce qui concerne la valeur de cet ouvrage, elle est déjà mise en évidence par les applications énumérées ci-dessus.

*G. Szász* (Szeged)

**Segundo Symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América,** 330 pages, Montevideo, Centro de Cooperación Científica de la Unesco para América Latina, 1954.

Ce symposium a été organisé par le centre de coopération scientifique de l'Unesco pour l'Amérique latine. Le volume contient le discours inaugural de Julio Rey Pastor qui analyse les investigations récentes poursuivies en Amérique latine dans diverses branches des mathématiques. Dans ce qui suit on trouve le texte des conférences prononcées par les participants et des discussions qui les ont suivies. Il y a ici quelques expositions générales de disciplines modernes et un nombre de communications sur des problèmes particuliers. Les auteurs sont: L. A. Santaló, G. D. Mostow, R. F. Arens, A. P. Calderón, A. González Dominguez, J. Horváth, M. Cotlar, G. García, E. H. Zarantonello, A. A. Monteiro, M. O. González, A. Grothendieck, J. Adem, E. Lammel, P. Pi Calleja, G. Dedebant, G. Klimovski.

*A. Korányi* (Szeged)

**G. Pickert, Projektive Ebenen** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band LXXX), VIII + 343 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1955.

Die Theorie der projektiven Ebenen hat sich in den letzten 25 Jahren aus gewissen axiomatischen Untersuchungen der reellen und komplexen projektiven Geometrie entwickelt und ist immermehr als ein neues, selbständiges Sachgebiet der Mathematik zu betrachten. Es war ebendeshalb die höchste Zeit die bisher gewonnenen zahlreichen Einzelergebnisse der wichtigsten Kapitel dieser Theorie möglichst systematisch zusammenzufassen. Eine solche Zusammenfassung ist im vorliegenden Buch gegeben.

In den ersten 9 Kapiteln wird der Leser von dem allgemeinen Begriff der sogenannten Inzidenzstrukturen bis zur vollständigen Charakterisierung der reellen projektiven Ebene geführt; inzwischen werden verschiedene spezielle Typen der projektiven und affinen Ebenen, nämlich die Desarguesschen, die homogenen, die Moufang-, die Translations- und die angeordneten Ebenen ausführlich behandelt. Die übrigen 3 Kapitel beschäftigen sich mit den topologischen Ebenen, den sogenannten Möbius-Netzen und zuletzt den projektiven Ebenen mit endlich vielen Elementen.

Im Laufe der Behandlung spielen die analytischen Methoden eine bedeutende Rolle. Es wirdschon im ersten Kapitel ein Koordinatenbegriff eingeführt und aus der Koordinatenmenge eine algebraische Struktur gebildet. Im folgenden werden überall ausführlich untersucht, wie die algebraischen Eigenschaften der Koordinatenmenge von den speziellen geometrischen Eigenschaften der einzelnen Ebenentypen abhängen; insbesondere werden die Beziehungen zwischen der Erfüllung des Desarguesschen bzw. Papposschen Satzes und der Assoziativität bzw. Kommutativität der zur Koordinatenmenge gehörenden algebraischen Struktur aufgeklärt. (Inzwischen fällt dem Leser die hervorragende Bedeutung der nichtassoziativen algebraischen Strukturen für diese Theorie gut in die Augen.) Die betreffenden algebraischen Probleme sind auch eingehend dargelegt.

Das Literaturverzeichnis zählt 236 Arbeiten auf, die sämtlich im Text erwähnt werden. Um auch zu weiteren Forschungen zu bewegen, sind zahlreiche ungelöste Probleme aufgeworfen.

*G. Szász* (Szeged)

**Gaston Julia, Cours de Géométrie infinitésimale.** Deuxième édition entièrement refondue. Cinquème Fascicule. *Géométrie infinitésimale.* Deuxième partie: *Théorie des surfaces*, 145 pages, Paris, Gauthier-Villars 1955.

Ce fascicule traite tout d'abord de la théorie classique des surfaces dans l'espace à trois dimensions; toutefois même ceux, qui connaissent déjà la géométrie différentielle des surfaces, peuvent trouver ici des problèmes intéressants. En premier lieu nous renvoyons au chapitre XVII. qui s'occupe des congruences de droites, notamment de la congruence des normales à une surface et des droites singulières d'une congruence de type général. Nous voulons appeler encore l'attention du lecteur particulièrement sur les belles démonstrations géométriques, que l'A. donne jointement aux démonstrations analytiques (cf. p. e. le théorème fondamental sur les tangentes conjuguees, p. 73).

Table des matières: Chap. XV. Propriétés générales des surfaces et des lignes tracées sur les surfaces. Chap. XVI. Lignes particulières tracées sur les surfaces. Chap. XVII. Application des résultats précédents aux congruences de droite. Chap. XVIII. Représentation des surfaces les unes sur les autres.

*A. Moór* (Debrecen)

## LIVRES REÇUS PAR LA RÉDACTION

H. **Arzelies, La cinématique relativiste,** XI + 228 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 2500 fr.

E. W. **Beth, L'existence en mathématiques,** 60 pages (Collection de Logique Mathématique Serie A, t. X), Paris, Gauthier-Villars, 1956. — 900 fr.

L. **Bieberbach, Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen im reellen Gebiet,** VIII + 281 Seiten (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band LXXXIII), Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer Verlag, 1956. — DM 29,80.

L. **Bieberbach, Einführung in die konforme Abbildung,** 179 Seiten (Sammlung Göschen, Band 768/768a), Berlin, Walter de Gruyter, 1956. — DM 4,80.

W. **Blaschke, Kreis und Kugel,** 2. durchgesehene und verbesserte Auflage, VIII + 167 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1956. — DM 18,60.

M. **Born, L'expérience et la théorie en physique** (traduit par J. P. Mathieu), 51 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 250 fr.

R. **Brisac, Exposé élémentaire des principes da la géométrie euclidienne,** 77 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 1200 fr.

L. **de Broglie, Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire,** VII + 297 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1956. — 3 500 fr.

C. **Carathéodory, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung,** Band I, 2. Auflage, XI + 171 Seiten, Leipzig, Teubner Verlag, 1956. — DM 14,—.

F. **Conforto, Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie,** XI + 276 Seiten (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 84), Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer Verlag, 1956. — DM 38,60.

R. **Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung,** Zweiter Band: Funktionen mehrerer Veränderlicher. 3. Auflage, XI + 468 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1955. — DM 36,—.

A. **Denjoy, Articles et Mémoires, I. La variable complexe, II. Le champ réel—Notices.** X + 508, VI + 509—1108 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 5100 fr.

L. **Destouches, La quantification en théorie fonctionnelle des corpuscules,** VI + 141 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1956. — 2000 fr.

**Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation,** Band II: **Anwendung der Laplace-Transformation.** I. Abteilung, 436 Seiten (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe, Band 15), Basel—Stuttgart, Verlag Birkhäuser, 1955. — DM 56,15.

J. O. **Fleckenstein, Der Prioritätsstreit zwischen Leibniz und Isaac Newton,** 27 Seiten, Basel—Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1956. — Sfr. 4,65.

P. **Février, L'interprétation physique de la mécanique ondulatoire et des théories quantiques,** VIII + 216 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1956. — 3200 fr.

R. **Garnier, Cours de Cinématique.** Tome II: **Roulement et viration. La formule de Savary et son extension à l'espace,** Troisième édition, revue et augmentée, X + 341 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1956. — 5000 fr.

**W. H. Gottschalk—G. A. Hedlund, Topological dynamics,** VII + 151 pages (American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XXXVI), Providence, American Mathematical Society, 1955. — $ 5,10.

**W. Haack, Elementare Differentialgeometrie,** VIII + 239 Seiten (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Naturwissenschaften, Mathematische Reihe, Band 20), Basel—Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1955. — DM 22,—

**L. Henkin, La structure algébrique des théories mathématiques,** 52 pages (Collection de logique mathématique, Série A, t. XI), Paris, Gauthier-Villars, 1956. — 900 fr.

**F. Hirzebruch, Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie,** VIII + 165 Seiten (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 9), Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer Verlag, 1956. — DM 30,80

**C. G. J. Jacobi, Canon arithmeticus,** 432 pages (Mathematische Lehrbücher und Monographien, Band II), Berlin, Akademie Verlag, 1956. — DM 46,—.

**M. Jouguet, Traité d'électricité théorique,** Tome II: **Électrocinétique et magnétostatistique,** VIII + 316 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 4200 fr.

**M. T. Kahan, Les cavités électromagnétiques et leurs applications en radiophysique,** 120 pages (Mémorial des Sciences Physiques, Fascicule LX), Paris, Gauthier-Villars, 1956. — 1600 fr.

**H. v. Mangoldt's Einführung in die höhere Mathematik für Studierende und zum Selbststudium,** Seit der fünften Auflage neu herausgegeben und erweitert von **Konrad Knopp,** Erster Band: **Zahlen, Funktionen, Grenzwerte, Analytische Geometrie, Algebra, Mengenlehre,** 10. vollständig neubearbeitete Auflage, XVI + 564 Seiten, Leipzig, S. Hirzel Verlag, 1955. —

**T. W. Martin — E. Reissner, Elementary differential equations,** XI + 260 pages, Cambridge, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1956. — $ 5,50.

**H. H. Ostmann, Additive Zahlentheorie,** Erster Teil: **Allgemeine Untersuchungen,** VII + 233 Seiten (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 7), Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer Verlag, 1956. — DM 29,80.

**H. H. Ostmann, Additive Zahlentheorie,** Zweiter Teil: **Spezielle Zahlenmengen,** VI + 136 Seiten (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 11), Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1956. — DM 22,—

**L. Roth, Algebraic threefolds with special regards to problems of rationality,** VIII + 142 pages (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 6), Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955. —

**A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung,** Vierte erweiterte Auflage, XI + 271 Seiten (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Band 22), Basel—Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1956. — Sfr. 26,—

**Mémorial des sciences mathématiques,** fascicules 132—134, Paris, Gauthier-Villars.

132. M. H. Pailloux — Élasticité, 89 pages, 1956. — 1000 fr.

133. G. Heilbronn — Intégration des équations différentielles ordinaires par la méthode de Drack, 103 pages, 1956. — 1300 fr.

134. M. T. Kahan—G. Rideau—P. Roussopoulos — Les méthodes d'approximation variationnelles dans la théorie des collisions atomiques et dans la physique des piles nucléaires, 82 pages, 1956. — 1200 fr.

135. G. Couchet, — Mouvements plans d'un fluide en présence d'un profil mobile, 80 pages, 1956. — 1200 fr.